

ББК 22.1  
С 23  
УДК 51(075.8)

Коллектив авторов:  
В.А. БОЛГОВ, Б.П. ДЕМИДОВИЧ, А.В. ЕФИМОВ, А.Ф. КАРАКУЛИН,  
С.М. КОГАН, Е.Ф. ПОРШНЕВА, А.С. ПОСПЕЛОВ, Р.Я. ШОСТАК

Рецензент  
кафедра специальных курсов высшей математики  
Московского энергетического института

**Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа:** Учебное пособие для втузов / Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др.: Под общ. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – 3-е изд., исправл. – Стереотипное издание. – М.: Альянс, 2016. – 480 с.

ISBN 978-5-91872-051-6

Содержит задачи по линейной алгебре и аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких переменных. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения.

Для студентов высших технических учебных заведений.

ББК 22.1  
УДК 51(075.8)

Учебное издание

БОЛГОВ Валентин Андреевич, ДЕМИДОВИЧ Борис Павлович,  
ЕФИМОВ Александр Васильевич, КАРАКУЛИН Анатолий Федорович,  
КОГАН Сергей Михайлович, ПОРШНЕВА Екатерина Федоровна,  
ПОСПЕЛОВ Алексей Сергеевич, ШОСТАК Родион Яковлевич

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**ДЛЯ ВТУЗОВ**

В четырех частях

Часть 1

Линейная алгебра и основы математического анализа

Подписано в печать 06.07.2016, Формат 84х108/32. Усл. печ. л. 25,2.  
Печать офсетная. Тираж 1800 экз. Заказ № К-6368.

ISBN 978-5-91872-051-6



9 785918 720516

ISBN 978-5-91872-051-6

ООО «Издательство Альянс»  
125319, Москва, ул. Планетная, д. 47-3  
Тел./факс (499) 155-71-95 (многоканальный)  
izdat@aliansbooks.ru www.aliansbooks.ru

Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия».  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13.

© Болгов В.А., Демидович Б.П. и др., 1981  
© Болгов В.А., Демидович Б.П.,  
Ефимов А.В. и др., с изменениями, 1993  
© Оформление. Издательство Альянс, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию .....	7
Из предисловия ко второму изданию .....	7
Из предисловия к первому изданию .....	7
Глава 1. Введение в анализ .....	9
§ 1. Действительные числа. Множества. Логическая символика .....	9
1. Понятие действительного числа (9). 2. Множества и операции над ними (11). 3. Верхние и нижние грани (15). 4. Логическая символика (17).	19
§ 2. Функции действительной переменной .....	26
1. Понятие функции (19). 2. Элементарные функции и их графики (23).	26
§ 3. Предел последовательности действительных чисел .....	29
1. Понятие последовательности (26). 2. Предел последовательности (27).	29
§ 4. Предел функции. Непрерывность .....	39
1. Предел функции (29). 2. Бесконечно малые и бесконечно большие (34). 3. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва (36). 4. Непрерывность на множестве. Равномерная непрерывность (38).	39
§ 5. Комплексные числа .....	51
1. Алгебраические операции над комплексными числами (39). 2. Многочлены и алгебраические уравнения (46). 3. Предел последовательности комплексных чисел (48).	51
Глава 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия .....	51
§ 1. Векторная алгебра .....	51
1. Линейные операции над векторами (51). 2. Базис и координаты вектора (54). 3. Декартовы прямоугольные координаты точки. Простейшие задачи аналитической геометрии (57). 4. Скалярное произведение векторов (60). 5. Векторное произведение векторов (64). 6. Смешанное произведение векторов (67).	68
§ 2. Линейные геометрические объекты .....	3
1. Прямая на плоскости (68). 2. Плоскость и прямая в пространстве (74).	



§ 3. Кривые на плоскости .....	81
1. Уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат (81). 2. Алгебраические кривые второго порядка (83). 3. Уравнение кривой в полярной системе координат (92). 4. Параметрические уравнения кривой (96). 5. Некоторые кривые, встречающиеся в математике и ее приложениях (98).	
§ 4. Поверхности и кривые в пространстве .....	102
1. Уравнения поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат (102). 2. Алгебраические поверхности второго порядка (105). 3. Классификация поверхностей по типу преобразований пространства (109).	
<b>Глава 3. Определители и матрицы. Системы линейных уравнений .....</b>	<b>114</b>
§ 1. Определители .....	114
1. Определители 2-го и 3-го порядков (114). 2. Определители $n$ -го порядка (117). 3. Основные методы вычисления определителей $n$ -го порядка (120).	
§ 2. Матрицы .....	124
1. Операции над матрицами (124). 2. Обратная матрица (127).	
§ 3. Пространство арифметических векторов. Ранг матрицы .....	130
1. Арифметические векторы (130). 2. Ранг матрицы (133).	
§ 4. Системы линейных уравнений .....	137
1. Правило Крамера (137). 2. Решение произвольных систем (139). 3. Однородные системы (143). 4. Метод последовательных исключений Жордана—Гаусса (146).	
§ 5. Некоторые вычислительные задачи линейной алгебры .....	148
1. Операции над матрицами (148). 2. Вычисление определителей (151). 3. Системы линейных уравнений (153).	
<b>Глава 4. Элементы линейной алгебры .....</b>	<b>156</b>
§ 1. Линейные пространства и пространства со скалярным произведением .....	156
1. Линейное пространство (156). 2. Подпространства и линейные многообразия (163). 3. Пространства со скалярным произведением (164).	
§ 2. Линейные операторы .....	168
1. Алгебра линейных операторов (168). 2. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора (175). 3. Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением (178). 4. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду (182).	
§ 3. Билинейные и квадратичные формы .....	184
1. Линейные формы (184). 2. Билинейные формы (185). 3. Квадратичные формы (186). 4. Кривые и поверхности второго порядка (190).	

<b>Глава 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной .....</b>	<b>194</b>
§ 1. Производная .....	194
1. Определение производной. Дифференцирование явно заданных функций (194). 2. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически (202). 3. Производные высших порядков (205). 4. Геометрические и механические приложения производной (209).	
§ 2. Дифференциал .....	212
1. Дифференциал 1-го порядка (212). 2. Дифференциалы высших порядков (216).	
§ 3. Теоремы о дифференцируемых функциях. Формула Тейлора .....	217
1. Теоремы о среднем (217). 2. Правило Лопиталя—Бернулли (218). 3. Формула Тейлора (223).	
§ 4. Исследование функций и построение графиков .....	226
1. Возрастание и убывание функции. Экстремум (226). 2. Направление выпуклости. Точки перегиба (230). 3. Асимптоты (232). 4. Построение графиков функций (233).	
§ 5. Векторные и комплексные функции действительной переменной .....	239
1. Определение вектор-функции действительной переменной (239). 2. Дифференцирование вектор-функции (240). 3. Касательная к пространственной кривой и нормальная плоскость (242). 4. Дифференциальные характеристики плоских кривых (243). 5. Дифференциальные характеристики пространственных кривых (245). 6. Комплексные функции действительной переменной (250).	
§ 6. Численные методы функции одной переменной .....	252
1. Численное решение уравнений (252). 2. Интерполирование функций (258). 3. Численное дифференцирование (265).	
<b>Глава 6. Интегральное исчисление функций одной переменной ....</b>	<b>269</b>
§ 1. Основные методы вычисления неопределенного интеграла .....	269
1. Первообразная и неопределенный интеграл (269). 2. Метод замены переменных (272). 3. Метод интегрирования по частям (277).	
§ 2. Интегрирование основных классов элементарных функций .....	279
1. Интегрирование рациональных дробей (279). 2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций (285). 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций (290).	
§ 3. Смешанные задачи на интегрирование .....	293
§ 4. Определенный интеграл и методы его вычисления .....	295
1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы (295). 2. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона—Лейбница (297). 3. Свойства определенного интеграла (299). 4. Замена переменной	



в определенном интеграле (302). 5. Интегрирование по частям (304).	
§ 5. Несобственные интегралы .....	305
1. Интегралы с бесконечными пределами (305).	
2. Интегралы от неограниченных функций (307).	
§ 6. Геометрические приложения определенного интеграла .....	310
1. Площадь плоской фигуры (310). 2. Длина дуги кривой (315). 3. Площадь поверхности вращения (318).	
4. Объем тела (320).	
§ 7. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики .....	323
1. Моменты и центры масс плоских кривых (323).	
2. Физические задачи (325).	
§ 8. Численное интегрирование функций одной переменной .....	330
Глава 7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных .....	337
§ 1. Основные понятия .....	337
1. Понятие функции нескольких переменных (337).	
2. Предел и непрерывность функции (339). 3. Частные производные (342). 4. Дифференциал функции и его применение (346).	
§ 2. Дифференцирование сложных и неявных функций .....	350
1. Сложные функции одной и нескольких независимых переменных (350). 2. Неявные функции одной и нескольких независимых переменных (353). 3. Системы неявных и параметрически заданных функций (355).	
4. Замена переменных в дифференциальных выражениях (358).	
§ 3. Приложения частных производных .....	363
1. Формула Тейлора (363). 2. Экстремум функции (365). 3. Условный экстремум (367). 4. Наибольшее и наименьшее значения функции (369). 5. Геометрические приложения частных производных (372).	
§ 4. Приближенные числа и действия над ними .....	377
1. Абсолютная и относительная погрешности (377). 2. Действия над приближенными числами (379).	
Ответы .....	382
Приложение. Краткое описание языка ФОРТРАН-IV (Тереженко А. М.) .....	473

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем третьем издании первой части сборника исправлены замеченные опечатки, уточнены формулировки и ответы ряда задач, добавлено приложение «Краткое описание языка ФОРТРАН-IV».

Авторы искренне признательны всем лицам, приславшим свои замечания, а также сотрудникам кафедры специальных курсов высшей математики МЭИ, полезные указания которых были учтены при окончательном редактировании настоящего издания.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание «Сборника задач» несущественно отличается от первого. Наиболее употребительные разделы сборника расширены за счет включения циклов новых задач. Для удобства пользования задачником ответы на все задачи помещены в конце сборника, а нумерация задач, в отличие от первого издания, дана по главам, так что номер каждой задачи состоит из номера главы и порядкового номера задачи в этой главе.

Указанная работа была выполнена членами авторского коллектива Ефимовым А. В., Каракулиным А. Ф., Кога-ном С. М. и Пospelовым А. С.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Идея создания «Сборника задач по математике для втузов», содержащего задачи по всем разделам курса математики инженерно-технических специальностей вузов, принадлежит Б. П. Демидовичу. Однако преждевременная смерть профессора Б. П. Демидовича помешала ему осуществить