МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. проректора по учебной работе

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 00854147D9DB094CC9BCA23534D24EC1A8
Владелец: Василенко Виталий Николаевич
Действителен: с 26.09.2023 до 19.12.2024

____________ Василенко В.Н.
(подпись) (Ф.И.О.)

«30» мая 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Математика

Направление подготовки

06.03.01 Биология

Направленность (профиль)

Пищевая микробиология

Квалификация выпускника

бакалавр

Воронеж

1. Цели и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины«Математика» является формирование компетенций обучающегося в области профессиональной деятельности и сфере профессиональной деятельности:*22 Пищевая промышленность, включая производство напитков и табака (в сфере технологий комплексной переработки мясного и молочного сырья); 40 Сквозные виды профессиональной деятельности.*

Дисциплина направлена на решение задач профессиональной деятельности следующего типа: *научно-исследовательский.*

Программа составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 06.03.01 Биология.

2. Перечень планируемых результатов обучения, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

№ п/п	Код компетенции	Формулировка компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
1	ОПК-6	Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии	ИД1$_{ОПК-6}$ - Демонстрирует понимание основных концепций и методов, современных направлений математики, физики, химии и наук о Земле, перспектив междисциплинарных исследований
			ИД2$_{ОПК-6}$ - Использует навыки лабораторной работы и методы химии, физики, математического анализа для решения профессиональных задач

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения (показатели оценивания)
ИД1$_{ОПК-6}$ - Демонстрирует понимание основных концепций и методов, современных направлений математики, физики, химии и наук о Земле, перспектив междисциплинарных исследований	Знает: основные концепции и методы, современные направления математики
	Умеет: применять основные концепции и методы, современные направления математики
	Владеет: навыками понимания основных концепций и методов, современных направлений математики
ИД2$_{ОПК-6}$ - Использует навыки лабораторной работы и методы химии, физики, математического анализа для решения профессиональных задач	Знает: основные понятия и методы математического анализа для решения профессиональных задач
	Умеет: решать задачи математического анализа для решения профессиональных задач
	Владеет: методами математического анализа для решения профессиональных задач

3. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» ОП ВО. Дисциплина является обязательнойк изучению.

Изучение дисциплины основано на знаниях, умениях и навыках полученных ранее при изучении курса математики в школе, дисциплин «Неорганическая химия»; «Аналитическая химия и физико-химические методы анализа».

Дисциплина является предшествующей для изучения дисциплин«Физика»; «Охрана природы»; «Физическая и коллоидная химия»; «Органическая химия»; «Науки о Земле», практической подготовки, подготовки выпускной квалификационной работы.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Виды учебной работы	Всего ак. ч	Распределение трудоемкости по семестрам, ак. ч
		2 семестр
Общая трудоемкость дисциплины	**144**	**144**
Контактная работа в т.ч. аудиторные занятия:	**58**	**58**
Лекции	36	36
в том числе в форме практической подготовки	-	-
Практические/лабораторные занятия	18	18
в том числе в форме практической подготовки	-	-
Консультации текущие	1,8	1,8
Консультации перед экзаменом	2,0	2,0
Вид аттестации (экзамен)	0,2	0,2
Самостоятельная работа:	**52,2**	**52,2**
Проработка материалов по лекциям, учебникам, учебным пособиям	21,2	21,2
Подготовка к практическим занятиям	13	13
Другие виды самостоятельной работы: Выполнение расчетов для ДЗ	18	18
Подготовка к экзамену (контроль)	**33,8**	**33,8**

5 Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1 Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела *(указываются темы и дидактические единицы)*	Трудоемкость раздела, ак.ч
2 семестр			
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра	Матрицы. Действия над матрицами. Определители. Свойства определителей. Невырожденные матрицы. Системы линейных уравнений. Решение систем матричным способом. Правило Крамера. Матричный метод в теоретических и экспериментальных исследованиях. Векторы. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов, их свойства и приложения. Векторное и смешанное произведение векторов, их свойства и приложения.	18
2	Аналитическая геометрия	Линия на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Плоскость, уравнения плоскости. расстояние от точки до плоскости. Прямая в пространстве. Уравнения прямой в пространстве. Углы между прямыми в пространстве, плоскостями и плоскостью и прямой. Использование методов аналитической геометрии в теоретических и экспериментальных исследованиях	17
3	Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных	Функция, способы задания функции. Поведение функции на интервале (возрастание, убывание, монотонность). Пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях. Производная функции. Механический смысл первой и второй производной. Таблица производных. Дифференциал. Теоремы о дифференцируемых на интервале функциях. Раскрытие неопределенностей: правило Лопиталя. Исследование функции. Применение дифференцирования как метода математического анализа в профессиональной деятельности. Понятие функции многих переменных. Геометрическое истолкование функции двух пе-	24,2

		ременных. Предел и непрерывность функции многих переменных. Частные и полные приращения функции многих переменных. Частные производные, определение, геометрический смысл. Производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент.	
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	Понятие первообразной, ее основные свойства. Неопределенный интеграл, его свойства. Непосредственное интегрирование. Таблица основных интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Определенный интеграл и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Применение интегрирования как метода математического анализа для решения прикладных задач.	24
5	Дифференциальные уравнения	Математическое моделирование инженерных задач на основе дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейные уравнения и уравнения Бернулли. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Метод вариации произвольных постоянных.	23
		Консультации текущие	1,8
		Консультации перед экзаменом	2
		Виды аттестации (экзамен)	0,2
		Подготовка к экзамену (контроль)	33,8

5.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции, ак. ч	ПЗ (или С), ак. ч	СРО, ак. ч
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра	6	3	9
2	Аналитическая геометрия	6	3	8
3	Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных	8	4	12,2
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	8	4	12
5	Дифференциальные уравнения	8	4	11
	Консультации текущие			1,8
	Консультации перед экзаменом			2,0
	Виды аттестации (экзамен)			0,2
	Подготовка к экзамену (контроль)			33,8

5.2.1 Лекции

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Тематика лекционных занятий	Трудоемкость, ак. ч
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра	Матрицы. Действия над матрицами. Определители. Свойства определителей. Невырожденные матрицы. Системы линейных уравнений. Решение систем матричным способом. Правило Крамера. Матричный метод в теоретических и экспериментальных исследованиях. Векто-	6

1		ры. Действия над векторами. Скалярное произведение векторов, их свойства и приложения. Векторное и смешанное произведение векторов, их свойства и приложения.	
2	Аналитическая геометрия	Линия на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Плоскость, уравнения плоскости. расстояние от точки до плоскости. Прямая в пространстве. Уравнения прямой в пространстве. Углы между прямыми в пространстве, плоскостями и плоскостью и прямой. Использование методов аналитической геометрии в теоретических и экспериментальных исследованиях.	6
3	Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных	Функция, способы задания функции. Поведение функции на интервале (возрастание, убывание, монотонность). Пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях. Производная функции. Механический смысл первой и второй производной. Таблица производных. Дифференциал. Теоремы о дифференцируемых на интервале функциях. Раскрытие неопределенностей: правило Лопиталя. Исследование функции. Применение дифференцирования как метода математического анализа в профессиональной деятельности. Понятие функции многих переменных. Геометрическое истолкование функции двух переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных. Частные и полные приращения функции многих переменных. Частные производные, определение, геометрический смысл. Производные высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент.	8
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	Понятие первообразной, ее основные свойства. Неопределенный интеграл, его свойства. Непосредственное интегрирование. Таблица основных интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Определенный интеграл и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Применение интегрирования как метода математического анализа для решения прикладных задач.	8
5	Дифференциальные уравнения	Математическое моделирование инженерных задач на основе дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейные уравнения и уравнения Бернулли. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Метод вариации произвольных постоянных.	8

5.2.2 Практические занятия (семинары)

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость, ак. ч
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра	1. Определители второго и третьего порядков. Определители более высоких порядков. Решение системы линейных уравнений методом Крамера. 2. Матрицы. Действия над матрицами. Решение систем матричным способом.	3

		3. Векторы. Скалярное произведение векторов, их свойства и приложения. Векторное произведение векторов, их свойства и приложения. 4. Смешанное произведение векторов, их свойства и приложения.	
2	Аналитическая геометрия	5. Прямая на плоскости. Уравнения прямой на плоскости. 6. Кривые второго порядка. Окружность, эллипс. 7. Гипербола, парабола. 8. Аналитическая геометрия в пространстве. Плоскость, уравнения плоскости. Расстояние от точки до плоскости.	3
3	Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных	9. Введение в анализ. Пределы: раскрытие неопределенностей. 10. Замечательные пределы. 11. Непрерывность функции. 12. Производная функции. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. 13. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной неявно. Производная функции, заданной параметрически. 14. Раскрытие неопределенностей: правило Лопиталя. 15. Исследование функции. Применение дифференцирования как метода математического анализа в профессиональной деятельности. 16. Функции нескольких переменных. Частные производные функций нескольких переменных. 17. Экстремум функции двух переменных. Производная по направлению. Градиент.	4
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	18. Непосредственное интегрирование. Таблица основных интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. 19. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе. Интегрирование по частям. 20. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование иррациональных функций. 21. Интегрирование тригонометрических функций. 22. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. 23. Применение интегрирования как метода математического анализа для решения прикладных задач (вычисление площади плоской фигуры, длины дуги, объем тела вращения).	4
5	Дифференциальные уравнения	24. Математическое моделирование инженерных задач на основе дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. 25. Линейные уравнения и уравнения Бернулли. 26. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. 28. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных. 29. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.	4

5.2.3 Лабораторный практикум *не предусмотрен*

5.2.4 Самостоятельная работа обучающихся

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Вид СРО	Трудоемкость, ак. ч
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра	Проработка материалов по лекциям, учебникам, учебным пособиям	4

		Подготовка к практическим занятиям	2
		Другие виды самостоятельной работы: Выполнение расчетов для ДЗ	3
2	Аналитическая геометрия	Проработка материалов по лекциям, учебникам, учебным пособиям	3
		Подготовка к практическим занятиям	2
		Другие виды самостоятельной работы: Выполнение расчетов для ДЗ	3
3	Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных	Проработка материалов по лекциям, учебникам, учебным пособиям	5,2
		Подготовка к практическим занятиям	3
		Другие виды самостоятельной работы: Выполнение расчетов для ДЗ	4
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	Проработка материалов по лекциям, учебникам, учебным пособиям	5
		Подготовка к практическим занятиям	3
		Другие виды самостоятельной работы: Выполнение расчетов для ДЗ	4
5	Дифференциальные уравнения	Проработка материалов по лекциям, учебникам, учебным пособиям	4
		Подготовка к практическим занятиям	3
		Другие виды самостоятельной работы: Выполнение расчетов для ДЗ	4

6 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Для освоения дисциплины обучающийся может использовать:

6.1 Основная литература

1. Богомолова, Е. П. Сборник задач и типовых расчетов по общему и специальным курсам высшей математики : учебное пособие. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 464 с. https://e.lanbook.com/book/211952
2. Высшая математика : учебное пособие / А. Б. Аруова, А. Ж. Аскарова, П. Б. Бейсебай [и др.]. — Астана : КазАТУ, 2022. — 120 с. https://e.lanbook.com/book/233825
3. Растопчина, О. М. Высшая математика : учебное пособие. — Москва : МПГУ, 2017. — 138 с. https://e.lanbook.com/book/107328

6.2 Дополнительная литература

1. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие для студ.вузов - М.: Альянс, 2020. - 336 с.
2. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебное пособие для вузов . — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. https://urait.ru/bcode/510530
3. Ракул, Е. А. Линейная и векторная алгебра : учебно-методическое пособие. — Брянск : Брянский ГАУ, 2022. — 51 с. https://e.lanbook.com/book/304844
4. Шевелев, Ю. П. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах) : учебное пособие. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 528 с. https://e.lanbook.com/book/211148

6.3 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся

1. Начала математического анализа. Дифференциальное исчисление: практикум: учебное пособие / Д. С. Сайко [и др.]. - Воронеж, 2021. - 91 с. http://biblos.vsuet.ru/ProtectedView/Book/ViewBook/2445

6.4 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

Наименование ресурса сети «Интернет»	Электронный адрес ресурса
Научная электронная библиотека	*http://www.elibrary.ru/defaulttx.asp?*
Образовательная платформа «Юрайт»	*https://urait.ru/*
ЭБС «Лань»	*https://e.lanbook.com/*
АИБС «МегаПро»	*https://biblos.vsuet.ru/MegaPro/Web*
Сайт Министерства науки и высшего образования РФ	*http://minobrnauki.gow.ru*
Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «ВГУИТ	*http://education.vsuet.ru*

6.5 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

При изучении дисциплины используется программное обеспечение,современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы: ЭИОС университета, в том числе на базе программной платформы «Среда электронного обучения 3KL», автоматизированная информационная база «Интернет-тренажеры», «Интернет-экзамен» и пр. (указать средства, необходимы для реализации дисциплины).

При освоении дисциплины используется лицензионное и открытое программное обеспечение:

Программы	**Лицензии, реквизиты подтверждающего документа**
Adobe Reader XI	(бесплатное ПО) https://acrobat.adobe.com/ru/ru/acrobat/pdf-reader/volume-distribution.html
Альт Образование	Лицензия № AAA.0217.00 с 21.12.2017 г. по «Бессрочно»
Microsoft Windows 8 Microsoft Windows 8.1	Microsoft Open License Microsoft Windows Professional 8 Russian Upgrade Academic OPEN 1 License No Level#61280574 от 06.12.2012 г. https://www.microsoft.com/ru-ru/licensing/licensing-programs/open-license
Microsoft Office Professional Plus 2010	Microsoft Open License Microsoft Office Professional Plus 2010 Russian Academic OPEN 1 License No Level #48516271 от 17.05.2011 г. https://www.microsoft.com/ru-ru/licensing/licensing-programs/open-license Microsoft Open License Microsoft Office Professional Plus 2010 Russian Academic OPEN 1 License No Level #61181017 от 20.11.2012 г. https://www.microsoft.com/ru-ru/licensing/licensing-programs/open-license
Microsoft Office 2007 Standart	Microsoft Open License Microsoft Office 2007 Russian Academic OPEN No Level #44822753 от 17.11.2008https://www.microsoft.com/ru-ru/licensing/licensing-programs/open-license
Libre Office 6.1	Лицензия № AAA.0217.00 с 21.12.2017 г. по «Бессрочно» (Включен в установочный пакет операционной системы Альт Образование 8.2)

Справочно-правовые системы

Программы	Лицензии, реквизиты подтверждающего документа
Справочные правовая система «Консультант Плюс»	Договор о сотрудничестве с “Информсвязь-черноземье”, Региональ-нальный информационный центр общероссийской сети распространения правовой информации Консультант Плюс № 8-99/RD от 12.02.1999 г.

7 Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебная аудитория для проведения учебных занятий № 225	Комплекты мебели для учебного процесса. Набор наглядных пособий, доска маркерная
Учебная аудитория № 416 Помещение для самостоятельной работы обучающихся	Компьютеры - 2 шт., ноутбук, мультимедийный проектор ACER, экран. Комплекты мебели для учебного процесса. Альт Образование 8.2 [Лицензия № ААА.0217.00 г. по «Бессрочно»], Libre Office 6.1 [Лицензия № ААА.0217.00 с 21.12.2017 г. по «Бессрочно» (Включен в установочный пакет операционной системы Альт Образование 8.2)].

8 Оценочные материалы для промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

Оценочные материалы (ОМ) для дисциплины (модуля) включают:

- перечень компетенций с указанием индикаторов достижения компетенций, этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы;
- описание шкал оценивания;
- типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков;
- методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

ОМ представляются отдельным комплектом и **входят в состав рабочей программы дисциплины (модуля)**.

Оценочные материалы формируются в соответствии с П ВГУИТ «Положение об оценочных материалах».

ПРИЛОЖЕНИЕ
к рабочей программе

1. Организационно-методические данные дисциплины для <u>очно-заочной</u> или заочной форм обучения

1.1 Объемы различных форм учебной работы и виды контроля в соответствии с учебным планом

Виды учебной работы	Всего ак. ч.	Распределение трудоемкости по семестрам, ак. ч.
		2 семестр
Общая трудоемкость дисциплины	**144**	144
Контактная работа в т.ч. аудиторные занятия:	**20,8**	20,8
Лекции	12	12
в том числе в форме практической подготовки	-	-
Практические занятия	6	6
в том числе в форме практической подготовки	-	-
Консультации текущие	0,6	0,6
Консультации перед экзаменом	2	2
Виды аттестации (экзамен)	0,2	0,2
Самостоятельная работа:	**89,4**	89,4
Проработка материалов по лекциям, учебникам, учебным пособиям	86,4	86,4
Подготовка к практическим занятиям	3	3
Подготовка к экзамену (контроль)	**33,8**	33,8

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

по дисциплине

МАТЕМАТИКА

1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования

№ п/п	Код компетенции	Формулировка компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
11	ОПК-6	Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии	ИД1$_{ОПК-6}$ - Демонстрирует понимание основных концепций и методов, современных направлений математики, физики, химии и наук о Земле, перспектив междисциплинарных исследований
			ИД2$_{ОПК-6}$ - Использует навыки лабораторной работы и методы химии, физики, математического анализа для решения профессиональных задач

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения (показатели оценивания)
ИД1$_{ОПК-6}$ - Демонстрирует понимание основных концепций и методов, современных направлений математики, физики, химии и наук о Земле, перспектив междисциплинарных исследований	Знает: основные концепции и методы, современные направления математики
	Умеет: применять основные концепции и методы, современные направления математики
	Владеет: навыками понимания основных концепций и методов, современных направлений математики
ИД2$_{ОПК-6}$ - Использует навыки лабораторной работы и методы химии, физики, математического анализа для решения профессиональных задач	Знает: основные понятия и методы математического анализа для решения профессиональных задач
	Умеет: решать задачи математического анализа для решения профессиональных задач
	Владеет: методами математического анализа для решения профессиональных задач

2 Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине

№ п/п	Разделы дисциплины	Индекс контролируемой компетенции (или ее части)	Оценочные средства		Технология/процедура оценивания (способ контроля)
			наименование	№№ заданий	
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра	ОПК -6	Собеседование (вопросы для экзамена)	73-80	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Тест	1-12	Компьютерное тестирование Процентная шкала. 0-100 %; 0-59,99% - неудовлетворительно; 60-74,99% - удовлетворительно; 75- 84,99% -хорошо; 85-100% - отлично.
			Домашнее задание	68	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Кейс-задание	61, 62	Уровни обученности: - «первый уровень обученно-

					сти», компетенция не освоена, недостаточный уровень освоения компетенции; - «второй уровень обученности», компетенция освоена, базовый уровень освоения компетенции; - «третий уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - «четвертый уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал второй уровень обученности; - оценка «хорошо» выставляется студенту, если он продемонстрировал третий уровень обученности; - оценка «отлично» выставляется студенту, если он продемонстрировал четвёртый уровень обученности; - оценка «неудовлетворительно», выставляется студенту, если он продемонстрировал первый уровень обученности.
2	Аналитическая геометрия	ОПК -6	Собеседование (вопросы для экзамена)	81-87	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Тест	13-24	Компьютерное тестирование Процентная шкала. 0-100 %; 0-59,99% - неудовлетворительно; 60-74,99% - удовлетворительно; 75- 84,99% -хорошо; 85-100% - отлично.
			Домашнее задание	69	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Кейс-задание	63	Уровни обученности: - «первый уровень обученности», компетенция не освоена, недостаточный уровень освоения компетенции; - «второй уровень обученности», компетенция освоена, базовый уровень освоения компетенции; - «третий уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - «четвертый уровень обучен-

					ности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал второй уровень обученности; - оценка «хорошо» выставляется студенту, если он продемонстрировал третий уровень обученности; - оценка «отлично» выставляется студенту, если он продемонстрировал четвёртый уровень обученности; - оценка «неудовлетворительно», выставляется студенту, если он продемонстрировал первый уровень обученности.
3	Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных	ОПК -6	Собеседование (вопросы для экзамена)	88-123	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Тест	25-36	Компьютерное тестирование Процентная шкала. 0-100 %; 0-59,99% - неудовлетворительно; 60-74,99% - удовлетворительно; 75- 84,99% -хорошо; 85-100% - отлично.
			Домашнее задание	70	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Кейс-задание	64, 65	Уровни обученности: - «первый уровень обученности», компетенция не освоена, недостаточный уровень освоения компетенции; - «второй уровень обученности», компетенция освоена, базовый уровень освоения компетенции; - «третий уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - «четвертый уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал второй уровень обученности; - оценка «хорошо» выставляется студенту, если он продемонстрировал третий уровень обученности; - оценка «отлично» выставля-

					ется студенту, если он продемонстрировал четвёртый уровень обученности; - оценка «неудовлетворительно», выставляется студенту, если он продемонстрировал первый уровень обученности.
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	ОПК -6	Собеседование (вопросы для экзамена)	124-141	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Тест	37-48	Компьютерное тестирование Процентная шкала. 0-100 %; 0-59,99% - неудовлетворительно; 60-74,99% - удовлетворительно; 75- 84,99% -хорошо; 85-100% - отлично.
			Домашнее задание	71	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Кейс-задание	66	Уровни обученности: - «первый уровень обученности», компетенция не освоена, недостаточный уровень освоения компетенции; - «второй уровень обученности», компетенция освоена, базовый уровень освоения компетенции; - «третий уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - «четвертый уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции; - оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал второй уровень обученности; - оценка «хорошо» выставляется студенту, если он продемонстрировал третий уровень обученности; - оценка «отлично» выставляется студенту, если он продемонстрировал четвёртый уровень обученности; - оценка «неудовлетворительно», выставляется студенту, если он продемонстрировал первый уровень обученности.
5	Дифференциальные уравнения	ОПК -6	Собеседование (вопросы для экзамена)	112-157	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»
			Тест	49-60	Компьютерное тестирование

					Процентная шкала. 0-100 %; 0-59,99% - неудовлетвори-тельно; 60-74,99% - удовлетворитель-но; 75- 84,99% -хорошо; 85-100% - отлично.
			Домашнее задание	71	Проверка преподавателем Отметка в системе: «неудов-летворительно, удовлетвори-тельно, хорошо, отлично»
			Кейс-задание	67	Уровни обученности: - «первый уровень обученно-сти», компетенция не освоена, недостаточный уровень ос-воения компетенции; - «второй уровень обученно-сти», компетенция освоена, базовый уровень освоения компетенции; - «третий уровень обученно-сти», компетенция освоена, повышенный уровень освое-ния компетенции; - «четвертый уровень обучен-ности», компетенция освоена, повышенный уровень освое-ния компетенции; - оценка «удовлетворитель-но» выставляется студенту, если он продемонстрировал второй уровень обученности; - оценка «хорошо» выставля-ется студенту, если он проде-монстрировал третий уровень обученности; - оценка «отлично» выставля-ется студенту, если он проде-монстрировал четвёртый уро-вень обученности; - оценка «неудовлетворитель-но», выставляется студенту, если он продемонстрировал первый уровень обученности.

3 Оценочные материалы для промежуточной аттестации.

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Для оценки знаний, умений, навыков студентов по дисциплине применяется бально-рейтинговая система оценки сформированности компетенций студента.

Бально-рейтинговая система оценки осуществляется в течение всего семестра при проведении аудиторных занятий и контроля самостоятельной работы. Показателями ОМ являются: текущий опрос в виде собеседования на лабораторных работах, практических занятиях, тестовые задания в виде решения контрольных работ на практических работах и самостоятельно (домашняя контрольная работа) и сдачи курсовой работы по предложенной преподавателем теме. Оценки выставляются в соответствии с графиком контроля текущей успеваемости студентов в автоматизированную систему баз данных (АСУБД) «Рейтинг студентов».

Обучающийся, набравший в семестре более 60 % от максимально возможной бально-рейтинговой оценки работы в семестре получает экзамен автоматически.

Студент, набравший за текущую работу в семестре менее 60 %, т.к. не выполнил всю работу в семестре по объективным причинам (болезнь, официальное освобождение и т.п.) допускается до экзамена, однако ему дополнительно задаются вопросы на собеседовании по разделам, выносимым на экзамен.

Аттестация обучающегося по дисциплине проводится в форме тестирования и предусматривает возможность последующего собеседования (экзамена).

Аттестация обучающегося по дисциплине/практике проводится в форме тестирования и предусматривает возможность последующего собеседования (экзамена).

Каждый вариант теста включает 15 контрольных заданий, из них:

- 5 контрольных заданий на проверку знаний;
- 5 контрольных заданий на проверку умений;
- 5 контрольных заданий на проверку навыков.

Если экзамен проводится в виде устного ответа. Максимальное количество заданий в билете – 4.

- 1-3 контрольных вопросов на проверку знаний;
- 1-2 *задачи* на проверку умений и навыков.

В случае неудовлетворительной сдачи экзамена студенту предоставляется право повторной сдачи в срок, установленный для ликвидации академической задолженности по итогам соответствующей сессии. При повторной сдаче зачета количество набранных студентом баллов на предыдущем экзамене не учитываются.

3.1 Тесты (тестовые задания)

Шифр и наименование компетенции **ОПК-6** способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии

№ задания	Тестовое задание с вариантами ответов и правильными ответами
1	Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, равен: Ответ ___1___
2	Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ равен… Ответ ___44__
3	Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 7\\ 0 & 4 & 3\\ -1 & 1 & -4\end{pmatrix}$. Алгебраическое дополнение для ее элемента a_{23} равно Ответ ___3___

4	Произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ есть матрица: 1) $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ 2) $AB=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ 3) $AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ 4) $AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
5	При решении системы $\begin{cases}x+2y=2,\\ 3x-4y=7\end{cases}$ получены значения *x* и *y*. Сумма (*x* + *y*) равна: Ответ ___2,1___
6	Дана линейная система $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}.$ Известно, что определитель системы не равен нулю. Тогда 1) система имеет бесчисленное множество решений 2) система не имеет решений 3) система имеет единственное решение 4) о наличии решений ничего сказать нельзя (система может как иметь так и не иметь решения)
7	Даны точки А(1; 2; 3) и В (0; 2; -3). Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны: 1) $\overrightarrow{AB}=\{1,0,6\}$ 2) $\overrightarrow{AB}=\{1,0,0\}$ 3) $\overrightarrow{AB}=\{-1,0,-6\}$ 4) $\overrightarrow{AB}=\{1,4,0\}$
8	Даны точки А(2; 2; 3) и В (0; 5; -3). Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ равен Ответ ___7____
9	Скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}=(3,5,8),\ \vec{b}=(-1,2,0)$, равно: Ответ ___7____
10	Векторы $\overline{a}\{4;2;3\}$ и $\overline{b}\{2;2;-4\}$- 1) компланарны 2) коллинеарны 3) ортогональны 4) равны
11	Смешанное произведение векторов $\vec{a}=(1;-2;0)$, $\vec{b}=(1;0;2)$, $\vec{c}=(-2;4;0)$ равно: Ответ ___0____
12	Смешанное произведение трех компланарных векторов равно Ответ ___0____
13	Угловой коэффициент прямой $6x+2y-5=0$ равен: Ответ __-3___

14	Расстояние от точки А(4;3) до прямой $3x+4y-10=0$ равно: Ответ __2,8___
15	Какая из данных прямых параллельна прямой 2x – y +3=0? 1) 4x+8y+17=0; 2) 4x-8y-11=0 3) 4x-2y+1=0 4) y = -2x – 7
16	Угол между прямыми $x - y = 0$ и $y = 0$ равен (в градусах): Ответ __45___
17	Радиус окружности x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 равен: Ответ ___5____
18	Уравнение 9x^2 -16y^2 = 144 есть уравнение: 1) окружности 2) эллипса 3) гиперболы 4) параболы
19	Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что ее оси 2a = 14 и 2b = 10. 1) x^2 / 49 - y^2 / 25 = 1 2) x^2 / 49 - y^2 / 5 = 1 3) x^2 - 5y^2 = 25 4) другой ответ
20	Расстояние от фокуса до директрисы параболы y^2 = 4x равно Ответ ___2____
21	Через точку $(2;2;-2)$ параллельно плоскости $x-2y-3z=0$ проходит плоскость: 1) $2x+3y-z=4$ 2) $x+2y+3z=29$ 3) $x-2y-3z=5$ 4) $x-2y-3z=4$
22	Уравнение прямой, проходящей через точку N(-2;1;-1) параллельно прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$ имеет вид: 1) $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ 2) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$ 3) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{3}$ 4) $\frac{x+2}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{3}$
23	Точка пересечения прямой $x=2t-1$, $y=t+2$, $z=1-t$ и плоскости $3x-2y+z=3$ будет: 1) $(5;5;2)$ 2) $(5;-5;-2)$ 3) $(5;0;-2)$ 4) $(5;5;-2)$
24	Угол между прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-4}$ и плоскостью $x-2y-2z=0$ равен: Ответ ___90____

25	Предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2+5x+4}$ равен: Ответ __0_____
26	Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+7x+1}{2x^2+3x+5}$ равен: Ответ __3_____
27	Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ равен: Ответ __1_____
28	Выберите правильное значение для второго «замечательного» предела $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = ...$ <u>1) *e*</u> 2) 0 3) -2 4) ∞
29	Установите соответствие между заданными функциями и их производными <table><tr><td>1</td><td>$y=\arcsin x$</td><td>А</td><td>$y'=-\frac{1}{1+x^2}$</td></tr><tr><td>2</td><td>$y=\arccos x$</td><td>Б</td><td>$y'=\frac{1}{1+x^2}$</td></tr><tr><td>3</td><td>$y=arctgx$</td><td>В</td><td>$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr><tr><td>4</td><td>$y=arcctgx$</td><td>Г</td><td>$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr></table>Ответ: 1-Г; 2-В; 3-Б; 4-А
30	Производная от функции $y=\cos 2x+2\sin 2x$ при *x* = 0 равна: Ответ __4_____
31	Производная от функции $y=\ln\left(1+e^x\right)$ равна: 1) $y'=\frac{1}{1+e^x}$ <u>2)</u> $y'=\frac{e^x}{1+e^x}$ 3) $y'=\frac{1+e^x}{x}$ 4) $y'=\frac{x}{1+e^x}$
32	Производная от функции $y=x^2\sin x$ равна: 1) $y'=x^2+\sin x$ 2) $y'=2x\sin x$ 3) $y'=x^2\cos x$ <u>4)</u> $y'=2x\sin x+x^2\cos x$
33	Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=x^2y-y^2$ равна <u>1) 2*xy*</u> 2) x^2y-2y 3) 2*x* 4) -2*y*
34	Частная производная функции $z=5x^2y-y^3+7$ по переменной *y* при $x=1, y=0$

	равна: Ответ _5___
35	Частная производная $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z=\frac{y^2}{x}$ равна: 1) $-\frac{2}{x}$ <u>2)</u> $\frac{2}{x}$ 3) $\frac{2y}{x^2}$ 4) $\frac{1}{x}$;
36	Производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z = y \cdot \ln x + x^2 y \ +8$ равна: 1) $\frac{y}{x}+2x$ <u>2)</u> $\frac{1}{x}+2x$ 3) $\frac{1}{x}+2y$ 4) $\frac{y}{x}$
37	Неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{5x+3}$ равен 1) $\frac{5}{5x+3}+C$ <u>2)</u> $\frac{1}{5}\ln\|5x+3\|+C$ 3) 5 $\ln\|5x+3\|+C$ 4) $5arctg\frac{5x+3}{5}+C$
38	Неопределенный интеграл $\int\sin(3-2x)\,dx$ равен <u>1)</u> $1/2\ \cos(3-2x)+C$ 2) 2cos (3- 2x) +C 3) $-1/2\ \cos(3-2x)+C$ 4) $-2\ \cos(3-2x)+C$
39	Неопределенный интеграл $\int\arcsin x dx$ равен: 1) $x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$ 2) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ 3) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$ <u>4) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$</u>
40	Определенный интеграл $\int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}dx$ равен Ответ __0,5_____
41	Определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/3}\cos(x/2)dx$ равен Ответ __1_____
42	Определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 x\cos x\,dx$ равен Ответ __0,25_____

43 Определенный интеграл $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ равен

Ответ __2____

44 Площадь области, ограниченной линиями $y = x, \quad y = x^3, \quad x = 1$ равна

Ответ __0,25____

45 Площадь области, ограниченной линиями $y = 2x, \quad y = x, \; x = 1$ равна

Ответ __0,5____

46 Объем тела, полученный при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, \quad y = x$ равен

1) π/12 2) π/8 3) π/7 4) π/6

47 Объем тела, полученный при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x, \quad y = x^2$ равен

1) π/10 2) π/15 3) 2π/15 4) π/5

48 Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

Ответ __1____

49 Каков порядок дифференциального уравнения $y' + y^{(5)} + y^{IV} - x = 0$?

1) первый 2) третий 3) четвертый 4) пятый

50 Установите соответсвие между дифференциальными уравнениями и их типами

1	$y' - \frac{2y}{x} = e^x + 1$	А	с разделяющимися переменными
2	$xy'y^2 - \ln x + 1 = 0$	Б	однородное
3	$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2 + xy}$	В	линейное
4	$xy' - xy^2 + y = 0$	Г	Бернулли

Ответ: 1 – В; 2 – А; 3 – Б; 4 – Г.

51 Нахождение частных решений дифференциальных уравнений по начальным условиям называется решением задачи…

Ответ Коши

52 Общее решение дифференциального уравнения $xy' - y = 1$ имеет вид

1) $1 - Cx$ 2) $C/x - 1$ 3) $Cx - 1$ 4) $Cx + 1$

53 Общее решение дифференциального уравнения $x^2 y' = x - 1$ имеет вид

1) $\ln x - \frac{1}{x} + C$ 2) $\ln x + \frac{1}{x} + C$ 3) $C - \ln x - \frac{1}{x}$ 4) $C + \ln x - \frac{1}{x}$

54	Частное решение дифференциального уравнения $y' = y \cdot tg\,x$ при y(0) = 2 имеет вид 1) $y = \frac{2}{\cos x}$ 2) $y = \frac{1}{\cos x}$ 3) $y = -\frac{1}{\cos x}$ 4) $y = \frac{2}{\sin x}$
55	Общее решение дифференциального уравнения $y'' = -1/x^2$ имеет вид 1) $C_1x + x + C_2$ 2) $C_1/x + C_2$ 3) $C_1x + C_2 + \ln x$ 4) $C_1x + x^2 + C_2$
56	Общее решение дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ имеет вид 1) $C_1x - \ln\lvert\cos x\rvert + C_2$ 2) $C_1x + \ln\lvert\cos x\rvert + C_2$ 3) $C_1 \ln\lvert\sin x\rvert + C_2$ 4) $C_1 ctgx + C_2$
57	Сумма корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения $y'' + 5y' - 6y = 0$ равна Ответ __-5____
58	Произведение корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения $y'' + 16y = 0$ равно Ответ __16____
59	Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$ имеет вид 1) $C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$ 2) $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$ 3) $C_1e^{-x} + C_2e^{-x}$ 4) $C_1e^{x} + C_2$
60	Частное решение $y_{чн}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = -5e^{2x}$ следует искать в виде 1) $y_{чн} = Axe^{2x}$ 2) $y_{чн} = Ae^{2x}$ 3) $y_{чн} = (Ax + B)e^{2x}$ 4) $y_{чн} = (Ax + B)xe^{2x}$

Критерии и шкалы оценки:
Процентная шкала **0-100 %; отметка в системе «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»**
0-59,99% - неудовлетворительно;
60-74,99% - удовлетворительно;
75- 84,99% -хорошо;
85-100% - отлично.

3.2 Кейс- задания (задания к экзамену)

Шифр и наименование компетенции **ОПК-6** способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии

Задание: Дать развернутые ответы на следующие ситуационные задания

Номер задания	Текст задания
61	Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 3 & 5 \\ x^2 & -2 & -x & 0 \\ 1/x & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$
62	Даны координаты вершин пирамиды АВСД A(5,-1,3), B(-1,5,3), C(3,5,-1),

	D(-2,-7,-5). Найти высоту пирамиды, используя формулу $V = \frac{1}{3}SH$.
63	Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ и плоскости, проходящей через точки А(2,-5,3), В(3,2,-5), С(5,-3,-2).
64	Объём продукции *u*, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, где *t* – время, ч; причём $1 \le t \le 8$. Вычислить производительность труда. Вычислить производительность труда через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня. В какое время производительность труда максимальна?
65	Общие издержки производства заданы функцией $U = 0{,}5x^2 + 0{,}6xy + 0{,}4y^2 - 700x - 596y + 2000$, где *x* и *y* – соответственно количество товаров А и В. Сколько единиц товара А и В нужно произвести, чтобы издержки на их изготовление были минимальными?
66	Вычислить интеграл $\int_{3/2}^{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$.
67	В городе с населением 4000 чел. распространение эпидемии подчиняется уравнению $\frac{dy}{dt} = 0{,}001y(4000-y)$, где *y* – число заболевших в момент времени *t*. Через какое время заболеет 90 % населения, если в начальный момент болело 2 % населения?

Проверка преподавателем

Уровни обученности:

- «первый уровень обученности», компетенция не освоена, недостаточный уровень освоения компетенции;
- «второй уровень обученности», компетенция освоена, базовый уровень освоения компетенции;
- «третий уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции;
- «четвертый уровень обученности», компетенция освоена, повышенный уровень освоения компетенции;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал второй уровень обученности;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если он продемонстрировал третий уровень обученности;
- оценка «отлично» выставляется студенту, если он продемонстрировал четвёртый уровень обученности;
- оценка «неудовлетворительно», выставляется студенту, если он продемонстрировал первый уровень обученности.

3.3. Домашнее задание

Шифр и наименование компетенции **ОПК-6** способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии

Номер задания	Текст задания
68	1. Произвести действия над матрицами.

	$2AB-C$, где $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\3&2&1\\1&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\4&-3&3\\1&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&-3&1\\4&0&2\\3&-1&2\end{pmatrix}$. 2. Решить систему линейных уравнений 1) с помощью правила Крамера, 2) средствами матричного исчисления. $\begin{cases}x+y-3z=-1\\2x+y-2z=1\\x+y+z=3\end{cases}$ 3. Даны координаты вершин пирамиды ABCD A(5,-1,3), B(-1,5,3), C(3,5,-1), D(-2,-7,-5). Найти: 1) угол между ребрами AB и AC; 2) площадь грани ABC; 3) объем пирамиды. 4. Даны вектора $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$. Известно $\lvert\vec{p}\rvert=3$, $\lvert\vec{q}\rvert=3$, $\angle(\vec{p},\vec{q})=150°$. Найти: 1) $\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert$, 2) $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$.
69	1. Даны координаты вершин треугольника ABC A(3,6), B(11,10), C(9,6). Найти: 1) уравнение медианы AD и ее длину; 2) уравнение высоты AE и ее длину: 3) угол между медианой и высотой. Сделать чертеж. 2. Даны координаты вершин пирамиды ABCD A(5,-1,3), B(-1,5,3), C(3,5,-1), Д(-2,-7,-5). Найти: 1) уравнение грани ABC; 2) угол между ребром AD и гранью ABC; 3) уравнение высоты, опущенной из точки D на грань ABC; 4) точку пересечения высоты с гранью и длину высоты. 3. Написать каноническое уравнение эллипса, если он проходит через точки M(2; 3) и N(4; 0). Найти его эксцентриситет. Сделать чертеж.
70	1. Найти производную $y'(x)$ функции $y(x)$, заданной параметрически с помощью уравнений: $\begin{cases}x=\sqrt{1-25t^2}\\y=\arcsin^2 5t\end{cases}$ 2. Найти производные функций: 1) $y=\ln^4\left(3x^2+1\right)$ 2) $y=x^{\cos 2x}$ 3) $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}}{2^{tgx}}$ 4) $y=ctg^2x\cdot\arccos(e^x)$ 3. Найти частные производные второго порядка функции $z=f(x,y)$. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$ 4. Вычислить градиент поля $z=x^2-2xy+3y-1$ в точке $M\left(1;2\right)$. 5. Найти производную функции $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ в точке $M\left(1;1\right)$ в направлении $\overrightarrow{MM_1}$, где $M(1;1)$, $M_1(2;3)$. 6. Найти экстремум функции $z=x^2+0.5xy+0.5y^2+2x+4y+2$.
71	1. Вычислить неопределенные интегралы 1) $\int\dfrac{dx}{x\ln^3 x}$ 2) $\int\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ 3) $\int x7^x\,dx$ 4) $\int\dfrac{x^2+2x+21}{(x+1)(x-4)(x+5)}dx$ 5) $\int\dfrac{dx}{(\sqrt{x}+1)x}$ 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: a) $y=2\sqrt{x},\ y=\sqrt{x},\ x=4.$ b) $x=5\cos t,\ y=4\sin t.$ 3. Вычислить длину дуги кривой:

	a) $y^2 = x^3$ от точки A(0,0) до точки B(4,8) b) $r = \cos\varphi$. 4.Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси OX . 5. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость: $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$
72	Найти общее решение дифференциальных уравнений 1) $\sin^2 x dy - 3^y \cos x dx = 0$ 2) $y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}$ 3) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x \cos^2 x}$ 4) $y'' = y' ctgx$ 5) $y'' + 2y' + y = x + 1$

Проверка преподавателем.

Отметка в системе: «неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично»:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если домашнее задание выполнено в установленный срок, выбрана верная методика решения задачи, приведен верный расчет;

- оценка «хорошо» выставляется студенту, если домашнее задание выполнено в установленный срок полностью, выбрна верная методика решения задачи, проведен верный расчет, имеются замечания по тексту и оформлению задания, допустил не более 1 ошибки;

- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если домашнее задание выполнено в установленный срок, выбрана верная методика решения задачи, проведен верный расчет, представил решение задач, имеются значительные замечания по тексту и оформлению задания, допустил не более 2 ошибок;

- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если выбрана неверная методика решения задачи, проведен неверный расчет, имеются значительные замечания по тексту и оформлению работы, допустил более 2 ошибок.

3.4 Собеседование (вопросы к устному ответу на экзамен)

Шифр и наименование компетенции **ОПК-6** способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии

Номер вопроса	Текст вопроса
73	Определители 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей. Определителем 2-го порядка называется число, которое обозначается в виде таблицы из двух строчек и двух столбцов и вычисляется по правилу. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Определитель 2-го порядка равен разности между произведениями элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях, т. е. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 5$ Определителем 3-го порядка называется число, обозначаемое таблицей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и определяется равенством.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \quad (1)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Минор будем обозначать M_{ij}.

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^p$, где *p* — сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Алгебраическое дополнение элемента будем обозначать такой же прописной буквой, что и сам элемент.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2. $\det(A \pm B) = \det A \pm \det B$.

Свойство 3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Свойство 6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю.

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

74 Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица.

Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Основные действия над матрицами.</u>

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

<u>Определение.</u> Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

<u>Определение.</u> Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

<u>Определение.</u> Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

<u>Определение.</u> Суммой (разностью) матриц <u>одинакового размера</u> является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$
$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

<u>Операция умножения матриц</u>.

<u>Определение:</u> Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

<u>Определение</u>. Матрицу В называют **транспонированной** матрицей А, а переход от А к В **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы В.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B=A^{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

Матрица A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A, если имеют место следующие матричные равенства:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Для всякой матрицы A, если ее определитель $\Delta\neq 0$, существует обратная матрица. Обратная матрица A^{-1} строится следующим образом:

1. Вычисляем определитель Δ данной матрицы A.
2. Для элементов a_{ij} матрицы A вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} по правилу: A_{ij} равно определителю второго порядка взятого со знаком $(-1)^{i+j}$ и получаемого вычеркиванием i-й строки и j-го столбца из определителя Δ.

Например:

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\left(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}\right)$$

3. Из элементов A_{ij} составляем матрицу B.

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Каждый элемент матрицы B делим на определитель Δ и транспонируем полученную матрицу. В результате находим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta & A_{31}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta & A_{32}/\Delta \\ A_{13}/\Delta & A_{23}/\Delta & A_{33}/\Delta \end{pmatrix}.$$

75 Решение системы 3-х линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера и матричным методом.

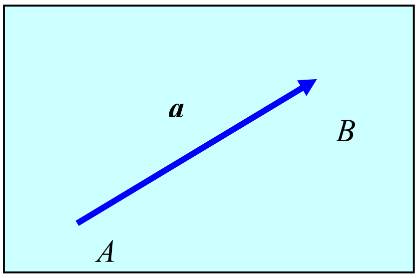
Дана система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными *x*, *y*, *z*:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=h_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициенты a_1,a_2,a_3, b_1,b_2,b_3, c_1,c_2,c_3 и свободные члены h_1,h_2,h_3 считаются заданными.

Тройка чисел *x*, *y*, *z* называется решением системы (1), если в результате подстановки этих чисел вместо *x*, *y*, *z* все три уравнения (1) обращаются в тождества.

Введем обозначения:

	$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$ Матрица *A* – матрица системы (1), *X* – вектор - столбец неизвестных, *H* – вектор - столбец свободных коэффициентов. Определитель системы $\Delta = \det(A)$ и $\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$ Если определитель Δ≠0, то решение системы (1) дают формулы Крамера $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$ Определитель Δ_x получается из Δ всей системы путем формальной замены 1-го столбца на правые части системы, Δ_y и Δ_z последовательной заменой 2-го и 3-го столбцов на эти же правые части. Рассмотрим систему уравнений(1). Будем полагать далее, что определитель системы не равен нулю. Представим систему в матричном виде: $A \cdot X = H$ Если существует обратная матрица A^{-1}, то, умножая матричное уравнение слева на A^{-1}, получим $X = A^{-1}H$.
76	Векторы. Линейные операции над векторами. Свойства линейных операций. *Вектором* называется направленный отрезок. Векторы будем обозначать буквами ***a***, ***b***, ***c***,… или, указывая начальные и конечные точки, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$.  Рис.1 Вектор называется *нулевым*, если начальная и конечная точки совпадают. В этом случае будем писать ***a*** = 0. *Длиной* вектора называется длина соответствующего ему направленного отрезка. Длина обозначается через | ***a*** | или $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$. Векторы ***a*** и ***b*** называются *коллинеарными* (при этом пишут ***a*** || ***b***), если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Иными словами, мы рассматриваем *свободные* векторы, начальные точки которых могут выбираться произвольным образом. **Линейные операции над векторами** 1. Сложение векторов. Пусть даны векторы ***a*** и ***b***. Совместим начальную точку вектора ***b*** с конечной точкой вектора ***a***. Тогда вектор, начальная точка которого совпадает с начальной точкой вектора ***a***, а конечная – с конечной точкой ***b***, называется *суммой векторов* ***a*** + ***b***.

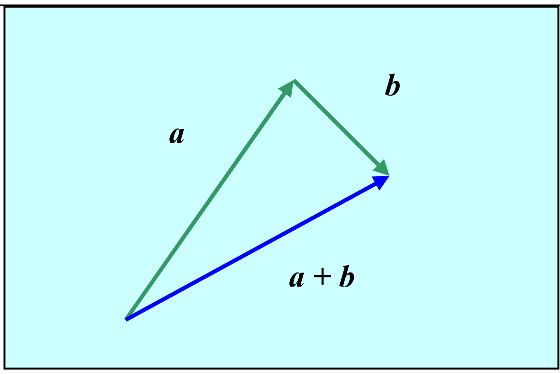


Рис. 2

Совместим начальные точки векторов ***a*** и ***b*** и обозначим эту точку через *O*. Построим параллелограмм *OACB* на сторонах этих векторов. Тогда вектор $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} =$ ***a* + *b***. Тем самым получено эквивалентное определение суммы векторов, называемое *правилом параллелограмма*.

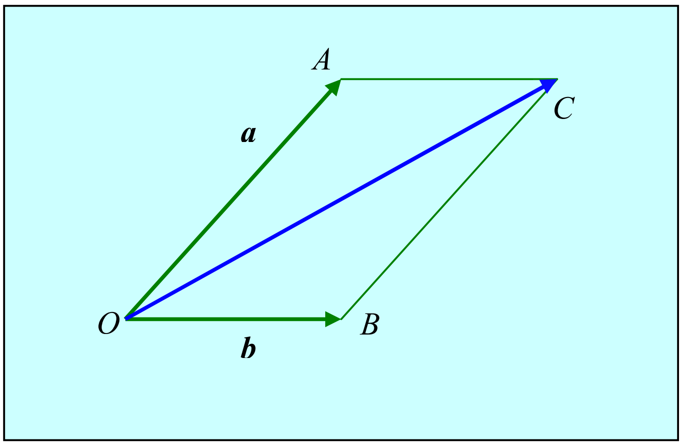


Рис. 3

Из рис. 3 видно, что

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OB} + \overline{BC}.$$

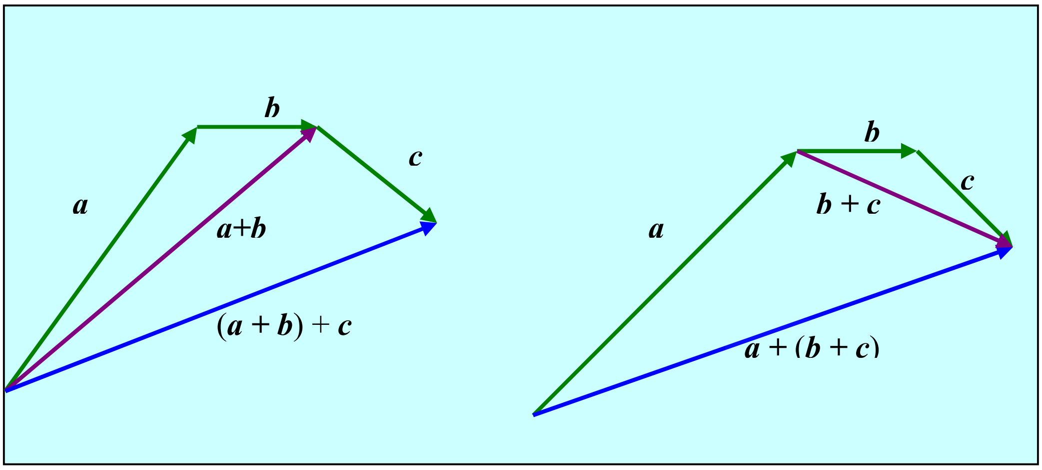


Рис. 4

Таким образом, операция сложения векторов коммутативна:

***a* + *b* = *b* + *a*.**

Имеет место также свойство ассоциативности:

(***a* + *b***) + ***c* = *a*** + (***b* + *c***).

2. Умножение вектора на число. *Произведением вектора* ***a*** *на число* λ называется вектор λ***a*** такой, что:
1. $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$.
2. $\lambda \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}$, и оба вектора одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и имеют противоположные направления, если $\lambda < 0$.

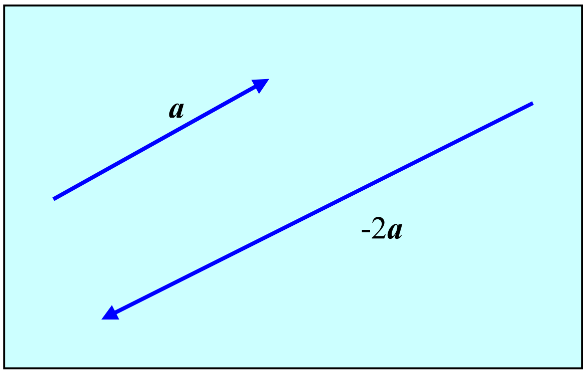


Рис. 5

Таким образом, если ***a*** не равен нулю и $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то найдется число λ такое, что $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$. Достаточно взять

$$\lambda = \varepsilon \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|},$$

где $\varepsilon = 1$, если ***a*** и ***b*** одинаково направлены, и $\varepsilon = -1$, если ***a*** и ***b*** имеют противоположные направления.
Отметим основные свойства операции умножения вектора на число, которые непосредственно вытекают из определения этой операции:

1. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$.
2. $\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.
3. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$.

77 Базис. Разложение вектора по базису. Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве некоторую точку *O* и три взаимно перпендикулярных вектора единичной длины ***i***, ***j*** и ***k***.

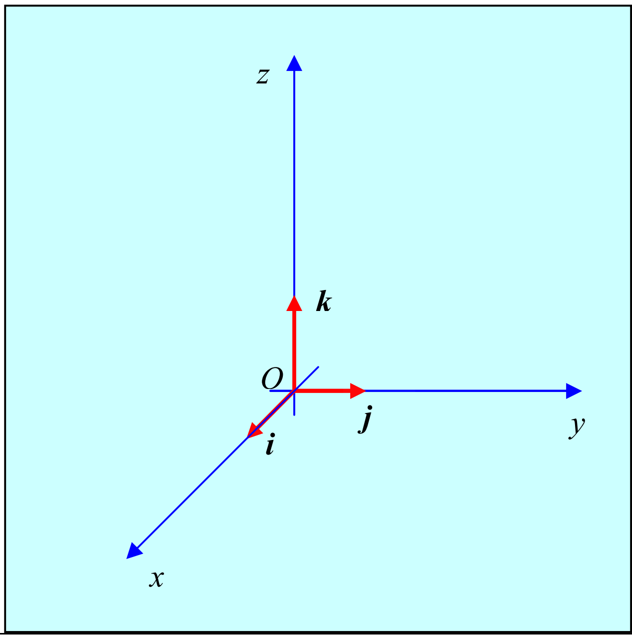


Рис. 1

Совокупность точки O и векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ называется *декартовой прямоугольной системой координат*. Прямые, проходящие через точку O параллельно векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, называются *координатными осями* и носят названия осей *абсцисс* (Ox), *ординат* (Oy) и *аппликат* (Oz) соответственно.

Пусть задан вектор $\boldsymbol{a}$. Совместим его начальную точку с началом координат O, а через его конечную точку A проведем плоскости, перпендикулярные координатным осям. Пусть эти плоскости пересекают оси Ox, Oy, Oz в точках L, M, N соответственно.

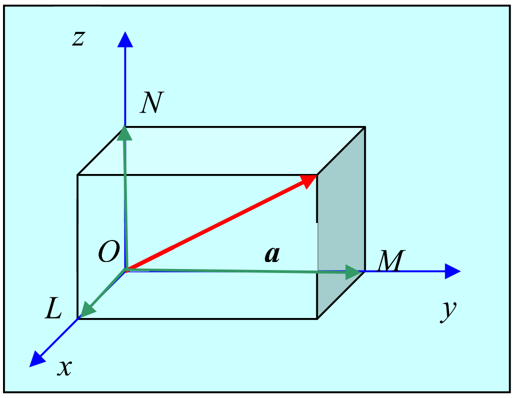


Рис. 2

Нетрудно убедиться, что

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$

Поскольку вектора $\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ коллинеарны векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ соответственно, то найдутся числа x_1, y_1, z_1 такие, что

$$\overrightarrow{OL} = x_1 \vec{i}, \ \overrightarrow{OM} = y_1 \vec{j}, \ \overrightarrow{ON} = z_1 \vec{k}.$$

Следовательно, любой вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

Числа x_1, y_1, z_1 в представлении (1) называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$. Вместе с равенством (1) будет использоваться также запись вида

$$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1).$$

Линейные операции над векторами в координатах

1. Сложение векторов. Если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, а $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \qquad (2)$$

2. Умножение вектора на число. Если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, то

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1). \qquad (3)$$

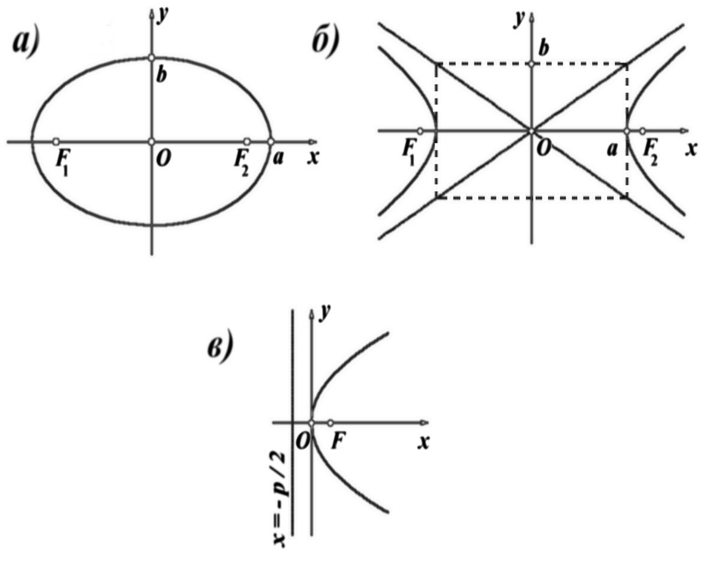
Из формул (2) и (3) вытекает, что

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

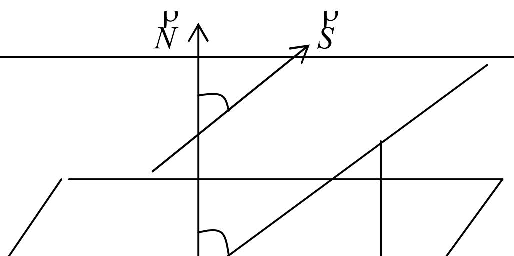
78	Скалярное произведение векторов. Свойства. Вычисление. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Свойства скалярного произведения: 1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$. 3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$; 5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$; Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами: $\cos\varphi = \dfrac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$
79	Векторное произведение двух векторов. Свойства. Вычисление. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, 2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 3) направлен в сторону, с которой кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки. Свойства векторного произведения: 1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$; 2) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$; 3) $(m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b}) = m(\vec{a}\times\vec{b})$; 4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$. 5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$ 6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
80	Смешанное произведение трех векторов. Вычисление. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ Свойства смешанного произведения: 1.Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.$ 2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярно-

	го умножения: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 3. Смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$ 4.Смешанное произведение 3-х векторов = 0, тогда и только тогда, когда они когда они компланарны. 5. Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $$\frac{1}{6}\left\|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right\|$$ 6. Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то $$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
81	Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости. Уравнение линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости. Расстояние между точками $M(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ плоскости определяется формулой: $$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$ **<u>Определение.</u> Уравнением линии** называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию. **<u>Определение.</u>** Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка $Ax + By + C = 0$, причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.** В зависимости от значений постоянных A,B и C возможны следующие частные случаи: - $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат - $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ $\{By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ox - $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ $\{Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Oy - $B = C = 0$, $A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy - $A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель. На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается: $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$ если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$. Дробь $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой. Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ и обозначить $-\frac{A}{B}=k;\quad -\frac{C}{B}=b;\quad т.е.\quad y=kx+b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**. Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $–C$, получим:

	$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где $a=-\frac{C}{A}$; $b=-\frac{C}{B}$ Это уравнение прямой в отрезках.
82	Угол между прямыми на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности. Расстояние точки до прямой. **Определение.** Если заданы две прямые y = $k_1x + b_1$, y = $k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $tg\alpha=\left\|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\|$. Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$. **Теорема.** *Прямые Ax + By + C = 0 и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.* **Теорема.** *Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой Ax + By + C =0 определяется как* $d=\frac{\|Ax_0+By_0+C\|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
83	Эллипс. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами. Каноническое уравнение эллипса имеет вид: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$ где *a* – большая полуось, *b* – малая полуось эллипса. Координаты фокусов: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где *c* – половина расстояния между фокусами. Числа *a, b* и *c* связаны соотношением: $c^2=a^2-b^2$. **Определение.** Отношение $e=\frac{c}{a}<1$ называется **эксцентриситетом** эллипса, где с – половина расстояния между фокусами, а – большая полуось. Эксцентриситет характеризует форму эллипса.
84	Гипербола. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$ где *a* – действительная полуось, *b* – мнимая полуось гиперболы. Координаты фокусов: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где*c*- половина расстояния между фокусами. Числа *a, b* и *c* связаны соотношением: $c^2=a^2+b^2$. **Определение.** Отношение $e=\frac{c}{a}>1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы.
85	Парабола. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой Каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$, где *p*- положительное число, равное расстоянию от фокуса *F* до директрисы *l*, называемое параметром параболы. Координаты фокуса:*F(p/2; 0)*.Уравнение директрисы: *x=-p/2.*

	 а) эллипс, б) гипербола, в) парабола.
86	Уравнения плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Расстояние точки до плоскости. Общее уравнение плоскости. Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор **нормали** к плоскости. *Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}$ (A, B, C) имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.* Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Для того, чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны. ($\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$ Таким образом, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ $\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ Уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ <u>Уравнение плоскости в отрезках.</u> Если в общем уравнении Ax + By + Cz + D = 0 поделить обе части на -D $-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$, заменив $-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

	$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ Угол между плоскостями находится по формуле $$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$ Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \mid\mid \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно: $$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
87	Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой. Канонические уравнения прямой в пространстве: $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$ Параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то получим $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве. Общие уравнения прямой $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ Угол между прямыми находится по формуле $$\cos\varphi=\pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\lvert\overrightarrow{S_1}\rvert\lvert\overrightarrow{S_2}\rvert}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$ Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны. $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю. $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
88	Взаимное расположение прямой и плоскости. <u>Угол между прямой и плоскостью.</u> **<u>Определение.</u> Углом между прямой и плоскостью** называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



	α α φ Искомый угол α = 90^0 - φ, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\lvert\vec{N}\rvert\lvert\vec{S}\rvert} \qquad \sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\dfrac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\lvert\vec{N}\rvert\lvert\vec{S}\rvert}$ В координатной форме $\sin\varphi = \pm\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$. Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю. $\vec{N}\perp\vec{S}, \quad \vec{N}\cdot\vec{S}=0, \quad \sin\varphi=0, \qquad Am+Bn+Cp=0.$ Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю. $\vec{N}\times\vec{S}=0; \qquad \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$
89	Функция. Способы задания. Сложная функция. Если каждому элементу x множества X по определенному закону ставится в соответствие единственный элемент y множества Y, то подобное отображение называется функцией, определенной на множестве X со значениями в множестве Y. При этом x называется независимой переменной, или аргументом, а y = f(x) – зависимой переменной, или функцией. X называется областью определения функции. Y - множеством значений функции. Задавать функцию можно табличным, графическим и аналитическим способами. *Если y=F(u) является функцией от u, а u=φ(x) – функцией от x, то* *y = F*[*φ(x)*] *называется* ***сложной функцией****.*
90	Предел функции. Односторонние пределы. Число A называется пределом функции f(x) при $x\to x_0$, если для любого числа ε> 0 найдется такое число δ> 0, что для всех x, удовлетворяющих условию 0 <$\lvert x - x_0\rvert$<δ, выполняется неравенство $\lvert f(x) - A\rvert<\varepsilon$. Обозначают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Число *A* называется пределом функции *y = f(x)* при *x*, стремящемся к x_0 слева (справа), если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ $при \quad x_0 - x < \delta \quad (x - x_0 < \delta).$ Обозначения: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A.$

91	Предел функции при x→∞, x → + ∞, x → - ∞. Теоремы о пределах. *Число А называется* ***пределом функции y = f(x) на бесконечности****, если* $\forall\varepsilon>0 \quad \exists X>0: \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon \quad при:$ $а) \quad x>X \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\right);$ $б) \quad x<-X \quad \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\right);$ $в) \quad \lvert x\rvert>X \quad \left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\right).$ *Функция y = f(x) имеет* ***бесконечный предел*** *при x, стремящемуся к x_0 (стремится к бесконечности, является бесконечно большой), если* $$\forall M>0 \quad \exists\delta>0: \lvert f(x)\rvert>M \quad при \quad \lvert x-x_0\rvert<\delta.$$ Обозначение: $$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$ Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x\to a$, то справедливы равенства $$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\pm g(x)\bigr)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x),$$ $$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$ а если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то и равенство $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$
92	1-й замечательный предел. Теорема (первый замечательный предел). $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$ *Следствия из первого замечательного предела* 1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin kx}{x}=k\lim\limits_{kx\to0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot1=k.$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgkx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin kx}{x}\frac{1}{\cos kx}=k\cdot1=k.$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin kx}{\sin mx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin kx}{x}\frac{x}{\sin mx}=k\frac{1}{m}=\frac{k}{m}.$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgkx}{tgmx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{tgkx}{x}\frac{x}{tgmx}=\frac{k}{m}.$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=1, \quad где \quad y=\arcsin x.$ 6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctgx}{x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{tgy}=1, \quad где \quad y=arctgx.$

	7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}.$
93	2-й замечательный предел. Теорема (второй замечательный предел). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$ Число e $\approx$ 2,71828... *Следствия из второго замечательного предела* 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\ln a,$ $где\quad a>0,\quad y=a^x-1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$
94	Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция *y*=*α*(*x*) называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$ 1. Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая. 2. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, а *f*(*x*) – функция, ограниченная в некоторой окрестности x_0, то $\alpha(x)f(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$. ***Функция f(x) называется*** *бесконечно большой* ***при*** $x\to x_0$***, если*** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty.$ Теорема. *Если* $\alpha(x)$ – *бесконечно малая при* $x\to x_0$, *то* $\frac{1}{\alpha(x)}$ – *бесконечно большая при* $x\to x_0$.
95	Сравнение бесконечно малых. Рассмотрим функции α(x) и β(x), для которых $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0,$ то есть бесконечно малые в окрестности x_0. 1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad \|A\|<\infty,$ то α(x) и β(x)называются бесконечно малыми одного порядка. В частности, если A=1, говорят, что α(x) и β(x) – эквивалентные бесконечно малые. 2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$ то α(x) называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с β(x). 3. Если

	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A,\quad \mid A\mid<\infty,$ то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая порядка n по сравнению с $\beta(x)$. Обозначения: $\alpha(x)$~$\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые, $\alpha(x)=O(\beta(x))$ – α есть бесконечно малая более высокого порядка, чем β.
96	Непрерывность функции. ***Функция* y=f(x) *называется* непрерывной *в точке* x_0*, если*** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$ Замечание. Из этого определения следует, во-первых, что функция определена при x = x_0, и во-вторых, что при $x\to x_0$ существует конечный предел функции. Свойства непрерывных функций Если функции f(x) и g(x) непрерывны при x = x_0, то f(x)+g(x) тоже непрерывна при x = x_0. Если функции f(x) и g(x) непрерывны при x = x_0, то f(x)g(x) тоже непрерывна при x = x_0. Если функции f(x) и g(x) непрерывны при x = x_0, то f(x)/g(x) тоже непрерывна при x = x_0 при условии, что $g(x_0)\neq 0$. Если $u=\varphi(x)$ непрерывна при x = x_0, а f(u) непрерывна при u = $u(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна при x = x_0. *Все элементарные функции непрерывны во всей области своего определения.*
97	Точки разрыва функции. Кусочно-непрерывные функции. Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой этой точки. Тогда x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если она либо не определена при x = x_0, либо не является непрерывной в точке x_0. Если существует конечный предел f(x) при $x\to x_0$, но не равный $f(x_0)$, точка разрыва x_0 называется устранимой особенностью. Термин «устранимая особенность» связан с тем, что, доопределив функцию в точке разрыва значением ее предела в этой точке, мы сделаем ее непрерывной при x = x_0, то есть устраним разрыв в рассматриваемой точке. Если существуют конечные, но не равные друг другу, односторонние пределы f(x) при $x\to x_0$, точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2-го рода**, если в этой точке функция *f*(*x*) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен. Функция называется кусочно-непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет разрывы первого рода и, кроме того, имеет односторонние пределы в точках a и b.
98	Производная функции. Геометрический смысл. Левая и правая производные. Пусть *y*=*f*(*x*) определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Придадим x_0 приращение Δx такое, что $x_0+\Delta x\in D(f)$. Функция при этом получит приращение $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. **Производной** функции *f(x)* в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует). $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$ Значение производной при данном значении *x* равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в точке с соответствующим значением *x* с положительным направлением оси *Ox*. $tg\alpha_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$ **Определение.** Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \qquad f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Обратное утверждение неверно. Во-первых, функция может иметь разрыв в точке x_0, а во-вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f(x) = |x|$ - имеет в точке $x = 0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

99 Связь дифференцируемости и непрерывности функции.

Определение. *Если приращение функции* y = f(x) *при* $x = x_0$ *можно представить в виде*

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где A = *const, то* y = f(x) *называется дифференцируемой при* $x = x_0$,

$A\Delta x$ *называется главной линейной частью приращения*

Теорема 1. *Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только в том случае, если она имеет в этой точке производную.*

Доказательство.

1) Если для y=f(x) *существует*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{то} \quad f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \beta(\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x)$ *– бесконечно малая при* $\Delta x \to 0$. *Тогда*

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x - \beta(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Следовательно, функция y = f(x) *дифференцируема при* $x = x_0$, *причем* $A = f'(x_0)$.

2) *Пусть* y=f(x) *дифференцируема при* $x=x_0$, *то есть ее приращение имеет вид*

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A = f'(x_0)..$$

Таким образом, f(x) *имеет производную в точке* x_0, *равную* A.

Теорема 2. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство.

Из формулы $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ *следует, что* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$

что и означает непрерывность f(x) *при* $x = x_0$.

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость. Например, y = |x| *непрерывна при* x = 0, *но не дифференцируема в этой точке.*

100 Дифференциал функции.

Пусть функция y = *f*(*x*) имеет производную в точке *x*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\,\Delta x$; $f'(x)\,\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. Дифференциалом функции *f*(*x*) в точке *x* называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции.

Обозначается дифференциал *dy* или *df*(*x*).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

Еще одно обозначение производной: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

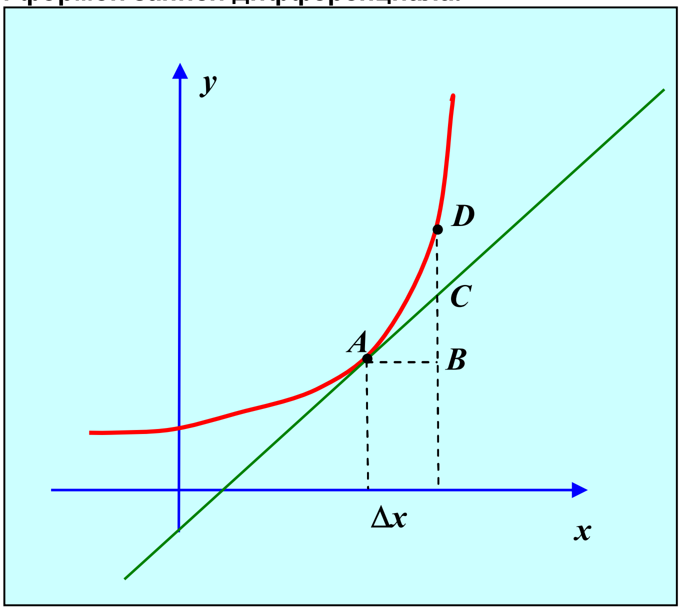
Если *u = f(x)* и *v = g(x)* функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv,$$
$$d(uv) = (u\,v)'dx = (u'v + v'u)\,dx = v\,du + u\,dv,$$
$$d(Cu) = C\,du., \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. $y = f(g(t))$ - сложная функция.

Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой-то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.



Рассмотрим график функции y=f(x) *и проведем касательную к нему при* $x=x_0$. *Тогда при приращении аргумента* Δx *приращение функции* Δy *равно длине отрезка* BD, *а приращение ординаты касательной*

$$f'(x_0)\Delta x = dy$$

равно длине отрезка CD. *Следовательно, дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.*

Так как истинное значение приращения функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, *при приближенных вычислениях можно заменять* Δy *на* dy, *то есть считать, что*

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

101 Основные правила дифференцирования.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то их сумма, произведение и частное (последнее при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место равенства:

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

102 Производные функций y =C, y = sin x, y = cos x, y = tg x, y = ctg x, y = $\log_a$x.

1. *Если* f(x)=C=*const, то* ΔC=0, *поэтому* C´=0.
2. $y=x^n$, *где* n – *натуральное число. Тогда по формуле бинома Ньютона можно представить*

<table>
<tr><td></td><td>
$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n =$$
$$= x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n =$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x).$$
Следовательно, $y' = nx^{n-1}$.
3. y = sin x,
$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$$
$$= 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x = \cos x.$$
4. y = cos x,
$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} =$$
$$= -\lim_{\Delta x\to 0}2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\sin(x+\Delta x) = -2\cdot\frac{1}{2}\sin x = -\sin x.$$
5. y = tg x,
$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
6. Аналогично можно получить формулу
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$
$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}. \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$
</td></tr>
<tr><td>103</td><td>
Обратная функция. Производная обратной функции.
Если для функции y=f(x) существует обратная функция x = φ(y), которая в некоторой точке y имеет производную φ’(y)≠0, то в соответствующей точке x функция f(x) тоже имеет производную, причем
$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$
</td></tr>
<tr><td>104</td><td>
Производные функций $y = a^x$, y = arcsinx, y =arccosx, y = arctgx, y = arcctgx.
$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a$$
По формуле производной обратной функции
</td></tr>
</table>

	$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$ $$(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$ $$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$ $$(arcctgx)' = (\frac{\pi}{2} - arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$
105	Производная сложной функции. Логарифмическая производная. Производная функции y = x^α ($\alpha \in$ R). *Если функция* u = φ(x) *имеет при некотором значении* x *производную* $u_x' = \varphi'(x)$, *а функция* y = f(u) *имеет при соответствующем значении и производную* $y_u' = f'(u)$, *то сложная функция* y = f(φ(x)) *тоже имеет при данном значении* x *производную, равную* $$y'(x) = f'(u)\cdot u'(x).$$ *Пусть* f(x)>*0 на некотором множестве значений аргумента и дифференцируема на этом множестве. Тогда по формуле производной сложной функции* $$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x),$$ *откуда* $f'(x) = f(x)\left(\ln f(x)\right)'$. *Эту формулу удобно использовать в тех случаях, когда производную натурального логарифма данной функции найти проще, чем производную самой функции.* *Если* α *– произвольное действительное число, то* $$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$
106	Производные и дифференциалы высших порядков. Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема на некотором отрезке [*a*,*b*]. В таком случае ее производная представляет собой тоже некоторую функцию *x*. Продифференцировав эту функцию, мы получим так называемую **вторую производную (или производную второго порядка)** функции *f(x).* Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом *f ‘(x)* будем называть производной первого порядка. **Производной *n*-го порядка (или *n*-й производной)** от функции *f(x)* называется производная (первого порядка) от ее *(n*-1)-й производной. Обозначение: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно *y”* и *y’’’…* Формула для второй производной функции, заданной параметрически. Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 \le t \le T$. Тогда $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$ Следовательно, $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} : \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$ Дифференциал от дифференциала функции называется ее **вторым дифференциалом** или **дифференциалом второго порядка**.

	Обозначение: $d^2y=d(dy)$. При вычислении второго дифференциала учтем, что dx не зависит от x и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель. Итак, $$d^2y = d\left(dy\right) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx =$$ $$= \left(f'(x)\right)' \left(dx\right)^2 = f''(x)dx^2.$$ Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции: $$d^3y = d\left(d^2y\right) = f'''(x)dx$$ и дифференциалы более высоких порядков. **Дифференциалом *n*-го порядка** называется первый дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка: $$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = \left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)' = f^{(n)}(x)dx^n.$$
107	Производная функции, заданной параметрически и неявно. *Если функция* y = f(x) *задана в виде:* $$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)' \end{cases}$$ *причем функция* φ(t) *имеет обратную функцию* t = Ф(x)*, то* y = ψ(Ф(x)), *и* $$y'(x) = \psi'(t)\Phi'(x) = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$ *Полученная формула дает возможность находить производную функции, заданной параметрически, без определения непосредственной зависимости* y *от* x*.* Пусть значения некоторых переменных x и y связаны между собой уравнением $F(x, y) = 0$. Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором отрезке такова, что уравнение $F(x, y) = 0$ при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество, то функция $y = f(x)$ есть неявная функция, определенная уравнением $F(x, y) = 0$. Термин «неявная функция» характеризует способ задания функции. Производная неявной функции находится путем дифференцирования по x обеих частей уравнения $F(x, y) = 0$, считая, что y есть функция независимой переменной x.
108	Теоремы Ролля и Лагранжа. ***Теорема (Ролля)***. Если функция $y = f(x)$ 1) непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка; 3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$, то внутри интервала (a,b) существует по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс. ***Теорема (Лагранжа)***. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[ab]$ найдется хотя бы одна точка c, $a < c < b$, что $$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$ Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, касательная в которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами a и b.
109	Теоремы Ролля и Коши. ***Теорема (Ролля)***. Если функция $y = f(x)$ 1) непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка; 3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$, то внутри интервала (a,b) существует по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс. ***Теорема 2 (теорема Коши).*** Если $f(x)$ и $g(x)$ – функции, непрерывные на $[a,b]$ и дифференци-

	руемые на (*a,b*), и *g'(x)*≠0 на (*a,b*), то на (*a,b*) найдется такая точка *x=c, a<c<b,* что $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
110	Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Если функции *f(x)* и *g(x)* удовлетворяют на некотором отрезке [a,b] условиям теоремы Коши и *f(a)* = *g(a)* = 0, то отношение *f(x)/g(x)* не определено при *x=a*, но определено при остальных значениях *x*. Поэтому можно поставить задачу вычисления предела этого отношения при $x \to a$. Вычисление таких пределов называют обычно «раскрытием неопределенностей вида {0/0}». ***Теорема (правило Лопиталя)***. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* удовлетворяют на отрезке [*a,b*] условиям теоремы Коши и *f(a)=g(a)=0.* Тогда, если существует $$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$ то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. **Замечание**. Если *f'(a)=g'(a)*=0 и *f'(x)* и *g'(x)* удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 3 на *f(x)* и *g(x),* к отношению $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ можно еще раз применить правило Лопиталя: $$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$ и так далее. Правило Лопиталя можно применять и для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то есть для вычисления предела отношения двух функций, стремящихся к бесконечности при $x \to a$. ***Теорема.*** Пусть функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны и дифференцируемы при $x \neq a$ в окрестности точки *a*, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$ Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$, если при *x*→*a* *f*(*x*) стремится соответственно к 0, 1, ∞, *g*(*x*) – соответственно к 0, ∞, 0. Эти неопределенности с помощью тождества $\left[f(x)\right]^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$ сводятся к неопределенности $0\cdot\infty$, т.е для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции ln *y* = *g*(*x*) ln *f*(*x*).
111	Признак монотонности функций. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума. Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции *y =f(x),* если

	$f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$ для всех *x* из некоторой δ-окрестности точки x_0. Точки максимума и минимума функции называются ее **точками экстремума**. Функция *y = f(x)* называется **возрастающей (убывающей)** на [*a,b*], если $$\forall x_1, x_2 \in [ab] \quad \text{таких, что} \quad x_1 < x_2,$$ $$f(x_1) < f(x_2) \quad \left(f(x_1) > f(x_2)\right).$$ ***Теорема 1.*** Если функция *f(x)*, дифференцируемая на [*a,b*], возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \ge 0$ на [*a,b*]. Геометрический смысл теоремы: если функция возрастает на отрезке [*a,b*], то касательная к ее графику во всех точках на этом отрезке образует с осью *Ox* острый угол (или горизонтальна). Если *f(x)* убывает на [*a,b*], то $f'(x) \le 0$ на [*a,b*]. Если функция убывает на рассматриваемом отрезке, то касательная к графику этой функции образует с осью *Ox* тупой угол (или в некоторых точках параллельна оси *Ox*). ***Теорема 2 (необходимое условие экстремума).*** Пусть функция *f(x)* задана в некоторой окрестности точки x_0. Если x_0 является точкой экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$ или не существует. **Замечание.** Отметим еще раз, что теорема 2 дает **необходимое, но не достаточное** условие экстремума, то есть не во всех точках, в которых $f'(x) = 0$, функция достигает экстремума. ***Теорема* (достаточное условие экстремума).** Пусть функция *f(x)* непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и с каждой стороны от данной точки $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда: 1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой максимума; 2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой минимума; 3) если $f'(x)$ не меняет знак в точке x_0, эта точка не является точкой экстремума.
112	Интервалы выпуклости (вогнутости) функции. Точка перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Кривая называется **выпуклой (обращенной выпуклостью вверх)** на интервале (*a,b*), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая называется **вогнутой (обращенной выпуклостью вниз)** на интервале (*a,b*), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале. ***Теорема 1.*** Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала (*ab*), то кривая *y = f(x)* выпукла на этом интервале. Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (*ab)*, то кривая *y = f(x)* вогнута на этом интервале. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**. ***Теорема 2 (необходимое условие точки перегиба).*** Если в точке x_0 перегиба кривой, являющейся графиком функции *y = f(x)*, существует вторая производная $f''(x)$, то $f''(x_0) = 0$. ***Теорема 3 (достаточное условие точек перегиба).*** Если функция *y = f(x)* дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и $f''(x)$ меняет знак при $x = x_0$, то x_0 – точка перегиба.
113	Асимптоты графика функции. Схема исследования функции. *Определение.* Прямая называется **асимптотой** графика функции *y = f(x)* , если расстояние от переменой точки этого графика до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность. 1. Вертикальные асимптоты – прямые, задаваемые уравнениями вида *x = a.* В этом случае определение асимптоты подтверждается, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке *a* бесконечен. 2. Горизонтальные асимптоты – прямые вида *y = a*. Такие асимптоты имеет график функции, предел которой при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ конечен, т.е.

	$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a.$$ 3. Наклонные асимптоты – прямые вида *y* = *kx* + *b*. где $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$. Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при *k* = 0. Замечание. Число вертикальных асимптот графика функции не ограничено, а наклонных и горизонтальных в сумме может быть не более двух (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$). **Общая схема исследования функции** С целью построения качественного графика, отражающего характерные особенности поведения данной функции, требуется определить: 1) область определения функции и ее поведение на границах области определения (найти соответствующие односторонние пределы или пределы на бесконечности); 2) четность и периодичность функции; 3) интервалы непрерывности и точки разрыва (указав при этом тип разрыва); 4) нули функции (т.е. значения *x* , при которых *f(x)* = 0) и области постоянства знака; 5) интервалы монотонности и экстремумы; 6) интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба; 7) асимптоты графика функции.
114	Функция нескольких переменных. Геометрическое изображение функции двух переменных. Линии и поверхности уровня. Если каждой паре $(x,\ y)$ значений двух не зависящих друг от друга переменных x и y из некоторой области их изменения D по некоторому правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z, то говорят, что задана функция двух переменных $z = f(x,\ y)$.Область D называется областью определения функции двух переменных. График функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Для изучения поведения функции строят так называемые линии уровня, т. е. сечения поверхности $z = f(x,\ y)$ плоскостями z = C при различных значениях C. Для функции трех переменных *u* = *u (x, y, z)* уравнение *u (x, y, z)* = *c* определяет поверхность в трехмерном пространстве, которую называют **поверхностью уровня**.
115	Предел и непрерывность функции двух переменных. **Определение.** Число A называется пределом функции $z = f(x,\ y)$ при $x \to x_0,\ y \to y_0$ (или в точке $M_0(x_0,\ y_0)$), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех $x \neq x_0,\ y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $\lvert f(x,\ y) - A \rvert < \varepsilon$. Обозначается предел следующим образом: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y) = A$ или $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,\ y) = A$. Функция $z = f(x,\ y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, если: 1) $f(x,\ y)$ определена в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ и ее окрестности; 2) имеет конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)$; 3) этот предел равен значению функции в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, т.е.

	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.
116	Частное и полное приращение функции. Частные производные функции двух переменных. Правило вычисления производных. Пусть задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргумент y оставим неизменным. Тогда функция z получит приращение $f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$, которое называется частным приращением z по переменной x и обозначается $\Delta_x z$: $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$. Аналогично, фиксируя аргумент x и придавая аргументу y приращение Δy, получим частное приращение функции z по переменной y: $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$. Частной производной функции двух переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю (если этот предел существует). Обозначается частная производная следующим образом: z'_x, z'_y или $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x, y),\ f'_y(x, y)$. Таким образом, по определению имеем: $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$. Замечание. При практическом вычислении частных производных пользуемся обычными правилами дифференцирования функции одной переменной, полагая аргумент, по которому ведется дифференцирование, переменным, а остальные аргументы – постоянными.
117	Дифференцируемость функции двух переменных. Полным приращением функции *u = f(x, y)* называется $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$ *Теорема 1.* Если частные производные f'_x, f'_y существуют в точке (x_0, y_0) и в некоторой ее окрестности и непрерывны в точке (x_0, y_0), то $\Delta u = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y,$ где α, β – бесконечно малые, зависящие от Δx, Δy. Если приращение функции *u = f (x, y)* в точке (x_0, y_0) можно представить в виде $\Delta u = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\Delta\rho),$ то функция называется дифференцируемой в этой точке, а выражение $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ – главной линейной частью приращения. где $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

	$$A = f'_x(x_0, y_0),\ B = f'_y(x_0, y_0).$$
118	Дифференциал функции двух переменных. **Главная линейная часть приращения** функции называется **полным дифференциалом** рассматриваемой функции. Обозначения: *dz*. Так же, как в случае функции одной переменной, дифференциалами независимых переменных считаются их произвольные приращения, поэтому $$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy \text{ или } dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$ Можно находить приближенное значение функции двух переменных по формуле: $$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y,$$ где $$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0.$$
119	Производная сложной функции. Инвариантность формы дифференциала функции двух переменных. Пусть аргументы функции $z = f(x, y)$ являются, в свою очередь, функциями переменных *u* и *v*: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда функция *f* тоже есть функция от *u* и *v*. Выясним, как найти ее частные производные по аргументам *u* и *v*, не делая непосредственной подстановки $z = f(x(u, v), y(u, v))$. При этом будем предполагать, что все рассматриваемые функции имеют частные производные по всем своим аргументам. Зададим аргументу *u* приращение Δu, не изменяя аргумент *v*. Тогда $$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta_u x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta_u y + \alpha\cdot\Delta_u x + \beta\cdot\Delta_u y.$$ Если же задать приращение только аргументу *v*, получим: $$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta_v x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta_v y + \alpha\cdot\Delta_v x + \beta\cdot\Delta_v y.$$ Разделим обе части первого равенства на Δu, а второго – на Δv и перейдем к пределу соответственно при $$\Delta u \to 0 \quad u \quad \Delta v \to 0.$$ Учтем при этом, что в силу непрерывности функций *x* и *y* $$\lim_{\Delta u\to 0}\Delta_u x = \lim_{\Delta u\to 0}\Delta_u y = \lim_{\Delta v\to 0}\Delta_v x = \lim_{\Delta v\to 0}\Delta_v y = 0.$$ Следовательно, $$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$ Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $f(x,y)$ является фактически функцией одной переменной *t*, и можно, используя полученные формулы и заменяя в них частные производные *x* и *y* по *u* и *v* на обычные производные по *t* (разумеется, при условии дифференцируемости функций *x(t)* и *y(t)*), получить выражение для $\frac{df}{dt}$: $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$ Предположим теперь, что в качестве *t* выступает переменная *x*, то есть *x* и *y* связаны соотношением $y = y(x)$. При этом, как и в предыдущем случае, функция *f* является функцией одной переменной *x*. Используя предыдущую формулу при $t = x$ и учитывая, что $$\frac{dx}{dx} = 1,$$ получим, что

	$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$ Обратим внимание на то, что в этой формуле присутствуют две производные функции *f* по аргументу *x*: слева стоит так называемая **полная производная**, в отличие от частной, стоящей справа. **Инвариантность формы дифференциала** Воспользовавшись формулами для частных производных сложной функции, выразим полный дифференциал функции *z = f (x, y)* , где *x = x(u,v), y = y(u,v),* через дифференциалы переменных *u* и *v*: $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv)+\frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv)=$$ $$=(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u})du+(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v})dv=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$ Следовательно, форма записи дифференциала сохраняется для аргументов *u* и *v* такой же, как и для функций этих аргументов *x* и *y*, то есть является **инвариантной** (неизменной).
120	Частные производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Частные производные функции *z = f (x,y)* являются, в свою очередь, функциями переменных *x* и *y*. Следовательно, можно найти их частные производные по этим переменным. Обозначим их так: $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=(f'_x(x,y))'_x;$$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=(f'_x(x,y))'_y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=(f'_y(x,y))'_x;$$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=(f'_y(x,y))'_y.$$ Таким образом, получены четыре частные производные 2-го порядка. Каждую из них можно вновь продифференцировать по *x* и по *y* и получить восемь частных производных 3-го порядка и т.д. **Частной производной *n*-го порядка** функции нескольких переменных называется первая производная от производной (*n* – 1)-го порядка. Частные производные обладают важным свойством: результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования . ***Теорема.*** Если функция *z = f (x,y)* и ее частные производные $$f'_x,\ f'_y,\ f''_{xy},\ f''_{yx}$$ определены и непрерывны в точке *M (x, y)* и в некоторой ее окрестности, то в этой точке $$f''_{xy}=f''_{yx}.$$ **Дифференциалом второго порядка** функции *u = f (x, y, z)* называется $$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)=$$

	$$=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy+d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz=$$ $$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2+$$ $$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dydz.$$ Аналогично можно определить дифференциалы 3-го и более высоких порядков: **Дифференциалом порядка *k*** называется полный дифференциал от дифференциала порядка (k – 1): $d^k u = d(d^{k-1} u)$.
121	Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума. Точка $M_0(x_0,\ y_0)$ называется точкой минимума (максимума) функции $z=f(x,\ y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x,\ y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0,y_0)<f(x,\ y)$, ($f(x_0,y_0)>f(x,\ y)$). Точки минимума и максимума функции $z=f(x,\ y)$ называются точками экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции (минимумом и максимумом соответственно). **Теорема** (**необходимое условие экстремума**). Если (x_0,y_0) – точка экстремума дифференцируемой функции $z=f(x,\ y)$, то ее частные производные z'_x и z'_y в этой точке равны нулю: $z'_x(x_0,y_0)=0,\ z'_y(x_0,y_0)=0$. **Теорема** (**достаточное условие экстремума**). Пусть функция $z=f(x,\ y)$: а) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0,y_0), в которой $z'_x(x_0,y_0)=0$ и $z'_y(x_0,y_0)=0$; б) имеет непрерывные частные производные второго порядка $z''_{xx}(x_0,y_0)=A;\ z''_{xy}(x_0,y_0)=B;\ z''_{yy}(x_0,y_0)=C$. Тогда, если $\Delta=AC-B^2>0$, то функция $z=f(x,\ y)$ в точке (x_0,y_0) имеет экстремум: максимум, если A<0; минимум, если A>0; если $\Delta=AC-B^2<0$, то функция $z=f(x,\ y)$ в точке (x_0,y_0) экстремума не имеет. В случае $\Delta=AC-B^2=0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым.
122	Производная по направлению. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в некоторой области *D* и имеет в этой области непрерывные частные производные. Выберем в рассматриваемой области точку $M(x,y,z)$ и проведем из нее вектор ***S***, направляющие косинусы которого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. На векторе ***S*** на расстоянии Δs от его начала найдем точку $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, где $$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}.$$ Представим полное приращение функции *f* в виде: $$\Delta u=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\delta\Delta x+\varepsilon\Delta y+\lambda\Delta z,$$ $$где\quad \lim_{\Delta s\to 0}\delta=\lim_{\Delta s\to 0}\varepsilon=\lim_{\Delta s\to 0}\lambda=0.$$ После деления на Δs получаем: $$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}+\delta\frac{\Delta x}{\Delta s}+\varepsilon\frac{\Delta y}{\Delta s}+\lambda\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$ Поскольку $$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha,\quad \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta,\quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma,$$

	предыдущее равенство можно переписать в виде: $$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma+\delta\cos\alpha+\varepsilon\cos\beta+\lambda\cos\gamma.$$ Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ $при \quad \Delta s\to 0$ называется **производной от функции *u = f (x, y, z)* по направлению вектора *S*** и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$. При этом $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$
123	Градиент функции. Свойства градиента. Вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции *u = f (x, y, z)* в этой точке, называется **градиентом** функции *u = f (x, y, z).* Обозначение: $$grad\ u=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}.$$ *Свойства градиента* 1. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора ***S*** равняется проекции вектора grad *u* на вектор ***S***. Доказательство. Единичный вектор направления ***S*** имеет вид $\mathbf{e_S}$ ={cosα, cosβ, cosγ}, поэтому правая часть формулы (4.7) представляет собой скалярное произведение векторов grad *u* и $\mathbf{e_s}$, то есть указанную проекцию. 2. Производная в данной точке по направлению вектора ***S*** имеет наибольшее значение, равное |grad *u* |, если это направление совпадает с направлением градиента. Доказательство. Обозначим угол между векторами ***S*** и grad *u* через φ. Тогда из свойства 1 следует, что $$\frac{\partial u}{\partial s}=\mid grad\ u\mid\cdot\cos\varphi,$$ следовательно, ее наибольшее значение достигается при φ=0 и равно |grad*u*|. 3. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору grad *u* , равна нулю. Доказательство. В этом случае $$\varphi=\frac{\pi}{2},\quad \cos\varphi=0,\quad \frac{\partial u}{\partial s}=0.$$ 4. Если *z = f (x,y)* – функция двух переменных, то $$grad\ f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$$ направлен перпендикулярно к линии уровня *f (x,y) = c,* проходящей через данную точку.
124	Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Функция *F(x)* называется первообразной функции *f(x)*на некотором множестве значений *X*, если *F´(x) = f(x)* на этом множестве. Совокупность всех первообразных функции *f(x)* на некотором множестве называется ее неопределенным интегралом. Обозначение: $\int f(x)dx=F(x)+C.$ При этом *f(x)* называется подынтегральной функцией, а *f(x)dx* – подынтегральным выражением.
125	Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Правила интегрирования. 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

4. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx.$$

Таблица интегралов

1	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C.$
3	$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, a>0, a\neq 1;$ $\int e^{x}dx = e^{x} + C.$
4	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
6	$\int \frac{dx}{\cos^{2}x} = tgx + C.$
7	$\int \frac{dx}{\sin^{2}x} = -ctgx + C.$
8	$\int \frac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C.$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}} = \ln\|x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\| + C.$

11	$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C.$$
12	$$\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 \pm a^2\right| + C.$$

126 Метод замены переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Формула **интегрирования заменой переменной** в неопределённом интеграле имеет вид.

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

то есть переменную *x* заменяют функцией новой переменной *t*..

Формулу

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \qquad (2)$$

Называют **формулой интегрирования подстановкой**.

То есть, иногда в неопределённом интеграле более удобно задавать не *x* как функцию *t*, а, наоборот, задавать *t* как функцию от *x*. При этом подразумевается, что в левой части совершен переход от *t* к исходной переменной *x* .

Формула интегрирования по частям

Теорема. Если функции *u(x)* и *v(x)* дифференцируемы на некотором промежутке, и на нем существует интеграл $\int vdu,$ то на нем существует и интеграл $\int udv,$ причем

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство.

d(uv) = *vdu* + *udv,* поэтому *udv* = *d(uv)* – *vdu.* Проинтегрируем обе части полученного равенства, учитывая, что

$$\int d(uv) = uv + C.$$

Тогда

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu,$$

127 Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.

Рассмотрим интегралы $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,$ $\quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене ax^2+bx+c.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2\right).$$

	В результате замены $t = x + \frac{b}{2a}, \quad x = t - \frac{b}{2a}, \quad dx = dt$ интегралы $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ сводятся к интегралам $\frac{1}{a}\int \frac{At - \frac{Ab}{2a} + B}{t^2 \pm m^2}dt, \quad \int \frac{At - \frac{Ab}{2a} + B}{\sqrt{a\left(t^2 \pm m^2\right)}}dt$, которые вычисляются с помощью табличных интегралов $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C.$ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C.$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\| + C.$ $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|x^2 \pm a^2\right\| + C.$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$
128	Интегрирование рациональных функций. Рациональной дробью называется функция вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Рациональная дробь $R(x)$ называется правильной дробью, если степень числителя меньше степени знаменателя, и неправильной дробью в противном случае. Правильные рациональные дроби вида: $1)\frac{A}{x-a}, \quad 2)\frac{A}{(x-a)^n}, \quad 3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad 4)\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$ где $(p^2 - 4q < 0)$, называются простейшими дробями I, II, III и IV типов.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + C.$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+\frac{p^2}{4})+q-\frac{p^2}{4}}dx =$

$$= \int \frac{A(x+\frac{p}{2})+B-A\frac{p}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}d(x+\frac{p}{2}).$$

Сделаем замену $t = x+\frac{p}{2}$ и обозначим $B - A\frac{p}{2} = \tilde{B},\ q-\frac{p^2}{4} = c^2.$

Тогда требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{At+\tilde{B}}{t^2+c^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+c^2} + \tilde{B}\int \frac{1}{t^2+c^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+c^2)}{t^2+c^2} + \tilde{B}\int \frac{1}{t^2+c^2}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+c^2) + \frac{\tilde{B}}{c}arctg\frac{t}{c} + C = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{\tilde{B}}{c}arctg\frac{2x-p}{2c} + C.$$

Здесь $2tdt = d(t^2+c^2)$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>129</td>
<td>

Разложение дроби на простейшие. Интегрирование иррациональных выражений.

Если *P(x)* и *Q(x)* – многочлены, то $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная дробь. Она называется **правильной**, если степень *P(x)* меньше степени *Q(x)*, и **неправильной**, если степень *P* не меньше степени *Q*. Любую неправильную дробь можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где *P(x) = Q(x) S(x) + R(x),* а *R(x)* – многочлен, степень которого меньше степени *Q(x).* Таким образом, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов, то есть степенных функций, и правильных дробей, так как $\frac{R(x)}{Q(x)}$ является правильной дробью.

Теорема 1. Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором ее знаменатель не равен нулю, существует и выражается через элементарные функции, а именно рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы.
Доказательство.

Представим рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

При этом последнее слагаемое является правильной дробью, которую можно представить в виде линейной комбинации простейших дробей. Таким образом, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена S(x) и простейших дробей, первообразные которых, как было показано, имеют вид, указанный в теореме.

Для интегралов вида

</td>
</tr>
</table>

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx,$$

где R – рациональная функция (многочлен или рациональная дробь), $r_1,\ldots,r_n$ – дроби с одним и тем же знаменателем m

$$\left(r_1=\frac{p_1}{m},\ldots,r_n=\frac{p_n}{m}\right),\quad \text{а}\quad \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d},$$

замена $t^m=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ приводит к $x=\dfrac{dt^m-b}{a-ct^m}$.

Таким образом, x является рациональной функцией t, следовательно, его производная тоже будет рациональной функцией. Кроме того,

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}=t^{p_i}\quad -$$

тоже рациональные функции от t (так как p_i – целое число). Поэтому после замены подынтегральное выражение примет вид $R_1(t)dt$, где R_1 – рациональная функция, интегрируемая описанными выше способами.

Замечание. С помощью подобных замен можно интегрировать функции вида

$$R(x,(ax+b)^{r_1},\ldots,(ax+b)^{r_n}),$$

и, в частности, $R(x,x^{r_1},\ldots,x^{r_n})$.

130

Интегрирование тригонометрических выражений.

Интегралы вида

$$\int\sin\alpha x\cos\beta x dx,\quad \int\sin\alpha x\sin\beta x dx,\quad \int\cos\alpha x\cos\beta x dx$$

вычисляются с применением формул

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x),$$
$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x),$$
$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x).$$

Интегралы вида

$$\int\sin^n x\cos^m x dx,$$

где m и n – целые числа, интегрируются с помощью замен:

а) если хотя бы одно из чисел m и n – нечетное (например,m), можно сделать замену t = *sin* x *(или* t = *cos* x *при нечетном n).*

б) если m и n – четные положительные числа, можно понизить степени тригонометрических функций с помощью формул

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

в) если m и n – четные и хотя бы одно из них отрицательно, можно применить замену t = *tg* x *или* t = *ctg* x

Интегралы вида

<table>
<tr><td></td><td>

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

где R *– рациональная функция, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки:*

$$t = tg\frac{x}{2},$$

тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

то есть все составляющие подынтегрального выражения представляют собой рациональные функции от t.

Если подынтегральная функция имеет вид R *($\sin^2$x, $\cos^2$x), можно выбрать замену* t = *tg* x. *При этом*

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

$$x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

и степень полученной рациональной функции будет ниже, чем при универсальной тригонометрической подстановке, что облегчает дальнейшее интегрирование.

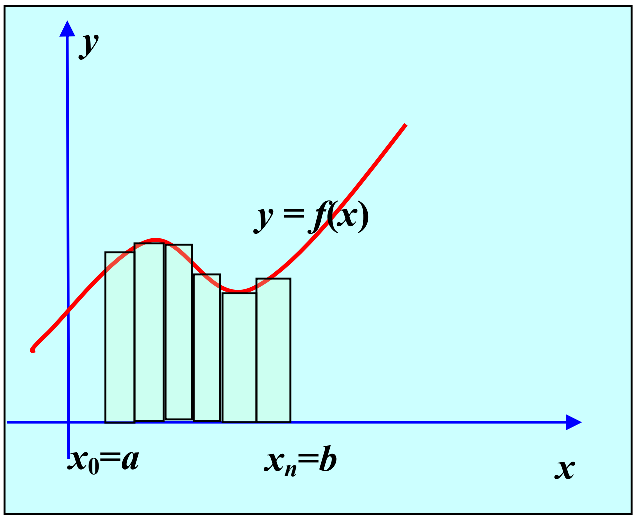
</td></tr>
<tr><td>131</td><td>

Определение определенного интеграла.

Рассмотрим отрезок [*a, b*] оси О*x*. Разобьем этот отрезок на *n* произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. При этом точки x_i называются **точками разбиения**, частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ – **отрезками разбиения** (их длины обозначаются $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$). Числом

$|\tau| = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$

обозначим наибольшую из длин частичных отрезков.



Пусть на [*a*,*b*] задана функция *y = f(x)*. Выберем на каждом отрезке разбиения по точке ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

называемую **интегральной суммой** функции *f(x)*. Если *f(x)* > 0, то такая сумма равна сумме площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$.

Если для любого разбиения отрезка [*a, b*] и любого выбора чисел ξ_i существует один и

</td></tr>
</table>

	тот же конечный предел интегральных сумм при $n \to \infty \quad и \quad \lvert\tau\rvert \to 0$: $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lvert\tau\rvert\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$ то функция *f(x)* называется **интегрируемой** на отрезке [*a, b*], а число *I* называется **определенным интегралом** функции *f(x)* на [*a, b*] и обозначается $$I = \int_a^b f(x)dx.$$ Числа *a* и *b* называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.
132	Необходимое и достаточное условие интегрируемости функций. Интегрирование непрерывных и некоторых разрывных функций. ***Теорема*** (необходимое условие интегрируемости). Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем. Замечание. Условие ограниченности функции является необходимым, но не достаточным условием интегрируемости. ***Теорема 1.*** Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем. Условие непрерывности функции является достаточным условием интегрируемости. ***Теорема 2.*** Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на нем.
133	Свойства определенного интеграла. 1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$ 2. $\displaystyle\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$ 3. Для любых трех чисел *a,b,c* справедливо равенство $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$ если все эти интегралы существуют. 4. Если всюду на отрезке [*a,b*] функция *f(x)*≥0, то $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge 0.$ 5. Если на отрезке [*a,b*] (*a*<*b*) $$f(x) \le g(x), \quad то \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$
134	Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \ (a \le x \le b)$ с постоянным нижним пределом *a* и переменным верхним пределом *x*. Величина этого интеграла является функцией верхнего предела *x*. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$, то есть положим $\displaystyle\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$ и назовем ее интегралом с переменным верхним пределом. ***Теорема 3.*** Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, то есть

	$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$ Теорема (Формула Ньютона – Лейбница). Если *F(x)* является первообразной непрерывной функции *f(x),* то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$ называемая формулой Ньютона – Лейбница. Замечание. Обычно вводится обозначение $F(b)-F(a)=F(x)\Big\vert_a^b$, и формула Ньютона-Лейбница записывается так: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big\vert_a^b=F(b)-F(a).$
135	Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. ***Теорема 1.*** Если: 1) функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a*,*b*], 2) функция $\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, 3) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то $$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (1)$$ Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к прежней переменной интегрирования, так как результатом вычисления будет число, не зависящее от выбора переменной. ***Теорема 2.*** Если функции *u*(*x*) и *v*(*x*) непрерывны вместе со своими производными на отрезке [*a*,*b*], то $$\int_a^b udv=uv\Big\vert_a^b-\int_a^b vdu. \quad (2)$$ (Формула (2) называется **формулой интегрирования по частям** для определенного интеграла).
136	Вычисление площади плоской фигуры. С геометрической точки зрения интегральная сумма представляет собой (при $f(x)\geq 0$) сумму площадей прямоугольников с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Переходя к пределу при $\lvert\tau\rvert\to 0$, получаем, что $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x)\geq 0$ представляет собой площадь так называемой криволинейной трапеции aA_1B_1b, то есть фигуры, ограниченной частью графика функции *f(x)* от *x* = *a* до *x* = *b* и отрезками прямых *x* = *a*, *x* = *b* и *y* = 0 (рис. 1):

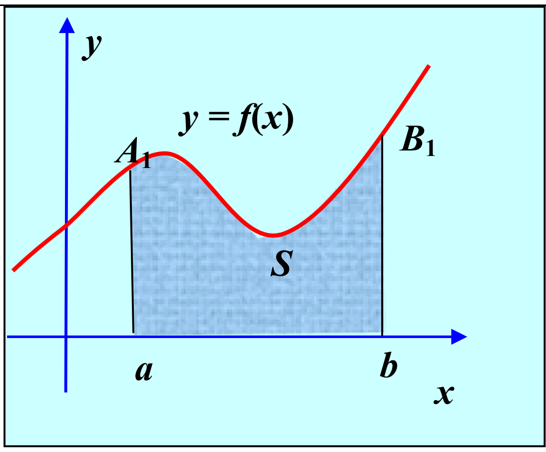
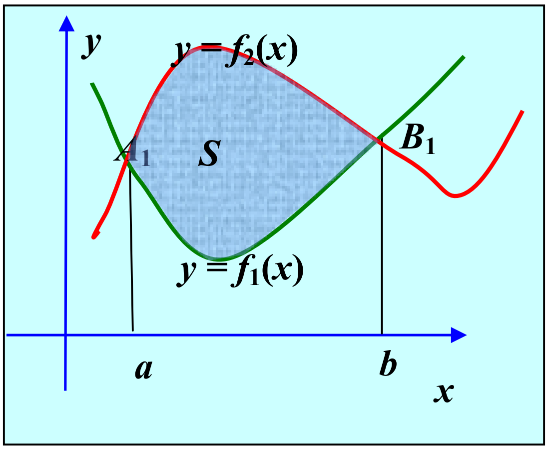


Рис. 1

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

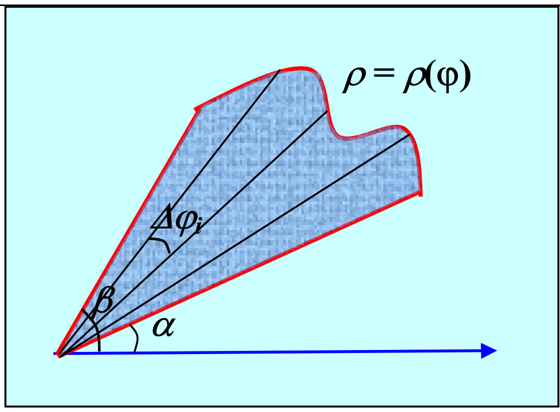
Если требуется найти площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций: $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (рис. 2), то ее можно рассматривать как разность площадей двух криволинейных трапеций: верхней границей первой из них служит график функции $f_2(x)$, а второй – $f_1(x)$.



Таким образом,

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (4)$$

137	Площадь криволинейного сектора.

	 Найдем площадь фигуры, ограниченной частью графика функции $\rho=\rho(\varphi)$ и отрезками лучей $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$. Для этого разобьем ее на n частей лучами $\varphi=\varphi_i$ и найдем сумму площадей круговых секторов, радиусами которых служат $\rho_i=\rho(\xi_i),\quad где\quad \varphi_{i-1}<\xi_i<\varphi_i.$ Как известно, площадь сектора вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}r^2\alpha,$ где r – радиус сектора, а α – его центральный угол. Следовательно, для суммы площадей рассматриваемых секторов можно составить интегральную сумму $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\varphi_i,\quad где\quad \Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}.$ В пределе при $\max\Delta\varphi_i\to 0$ получим, что площадь криволинейного сектора $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2d\varphi.$
138	Объем тела вращения. Объем **тела вращения**, то есть тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной частью графика функции $y=f(x)$ от $x=a$ до $x=b$ и отрезками прямых $x=a$, $x=b$ и $y=0$, то площадь сечения такого тела плоскостью $x=\text{const}$ равен $v=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(f(x))^2dx.$
139	Длина дуги плоской кривой. а) *Длина дуги в декартовых координатах* Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$ вместе со своей производной. $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$ б) *Длина дуги кривой, заданной в параметрической форме* Если уравнения кривой заданы в виде $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad где\quad \alpha\le t\le\beta,$ а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $\varphi'(t)\ne 0\quad на\quad [\alpha,\beta],$ то эти уравнения определяют непрерывную функцию $y=f(x)$, имеющую непрерывную производную

<table>
<tr><td></td><td>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Если

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),$$

то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\, \varphi'(t)dt,$$

или

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \qquad (2)$$

в) *Длина дуги в полярных координатах*

Если уравнение кривой задано в полярных координатах в виде $\rho = f(\varphi)$, то $x = \rho\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$ – параметрические уравнения относительно параметра φ. Тогда для вычисления длины дуги можно использовать формулу (7), вычислив предварительно производные x и y по φ:

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = (f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2 = \rho'^2 + \rho^2,$$

поэтому

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi. \qquad (3)$$

</td></tr>
<tr><td>140</td><td>

Несобственный интеграл первого рода.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq a$. Тогда интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

имеет смысл при любом $b > a$ и является непрерывной функцией аргумента b.
Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

то его называют **несобственным интегралом 1-го рода** от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом, по определению

</td></tr>
</table>

	$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$ При этом говорят, что несобственный интеграл существует или **сходится**. Если же не существует конечного предела (1), несобственный интеграл не существует или расходится. Геометрической интерпретацией несобственного интеграла 1-го рода является площадь неограниченной области, расположенной между графиком функции *y= f(x)* , прямой *x = a* и осью О*x*
141	Несобственный интеграл второго рода. Пусть функция *f*(*x*) определена и непрерывна при $a \le x < b$ и имеет разрыв при $x = b$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом: $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (2)$$ и называется **несобственным интегралом 2-го рода**. Если предел, стоящий справа, существует и конечен, интеграл называется **сходящимся**, в противном случае – **расходящимся**. Аналогичным образом определяются несобственные интегралы от функции, имеющей разрыв при $x = a$: $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$ и от функции, разрывной в точке *c* ($a<c<b$): $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$ если существуют оба интеграла, стоящие в правой части равенства.
142	Понятие дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши. Уравнения, в которые неизвестная функция входит не только сама, но и под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями. Будем рассматривать уравнения, где неизвестная функция является функцией одной переменной. Такие уравнения называются **обыкновенными дифференциальными уравнениями**. Уравнение вида $$F(x,u(x),u'(x),u''(x),\ldots,u^{(n)}(x))=0 \quad (1)$$ называется **обыкновенным дифференциальным уравнением *n*-го порядка**. При этом **порядком** уравнения называется максимальный порядок входящей в него производной. Функция, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество, называется **решением** дифференциального уравнения. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида: $$F(x,y,y')=0.$$ или

	$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \quad (2)$$ общим решением уравнения (2) является все множество функций, обращающих при подстановке рассматриваемое уравнение в тождество. Пусть теперь требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $$y(x_0)=y_0, \qquad (3)$$ называемому **начальным условием**. Если общее решение уравнения (2) задается формулой $$y=\varphi(x,C), \qquad (4)$$ то значение постоянной *C*, соответствующее поставленному начальному условию, можно определить, подставив в равенство (4) $x = x_0$ и $y = y_0$. Задача выбора из общего решения (4) уравнения (2) решения, удовлетворяющего начальному условию (3), называется **задачей Коши**, а выбранное решение называется **частным решением** уравнения (2).
143	Общее и частное решения дифференциальное уравнения первого порядка. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция y= φ(x, C),которая зависит от одной произвольной постоянной С и удовлетворяет следующим условиям: а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом некотором значении С. б) каково бы ни было начальное условие $y\big\|_{x=x_0}=y_0$, можно найти такое значение С = C_0, что функция y = φ(x, C_0) удовлетворяет данному начальному условию. Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция y = φ(x, C_0), полученная из общего решения y = φ(x,C) при конкретном значении постоянной С=C_0.
144	Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде $$y'=f(x)\,g(y) \qquad (1)$$ Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными состоит из следующих шагов: 1 шаг: заменим в (1) y' на $\frac{dy}{dx}$ и перепишем уравнение: $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$; 2 шаг: умножим обе части на dx: $dy=f(x)\,g(y)dx$; 3 шаг: разделим обе части уравнения на $g(y)$, считая, что $g(y)\neq 0$: $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$. Дифференциальное уравнение такого вида называется уравнением с разделенными переменными; 4 шаг: проинтегрируем обе части этого уравнения: $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$ +C
145	Однородное уравнение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду $$y'=f\left(\frac{y}{x}\right).$$ Однородное дифференциальное уравнение первого порядка сводится к уравнению с разделяющимися переменными в результате замены переменной по формуле: $u=\frac{y}{x}$. Действительно, так как $y=ux$, то $y'=u'x+u$, поэтому после выполнения подстановки уравнение

	примет вид $u'x+u=f(u),$ или, после преобразований, $u'=\dfrac{f(u)-u}{x}$, т.е., является уравнением с разделяющимися переменными.
146	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли. Метод Бернулли. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если неизвестная функция и ее производная входят в него линейно, то есть в первой степени. Такое уравнение имеет вид $$y'+p(x)y=q(x). \qquad (1)$$ Решение дифференциального уравнения (1) будем искать в виде произведения двух функций: $y(x)=u(x)\,v(x)$ (метод Бернулли). Подставим $y=uv$ и производную $y'=u'v+uv'$ в уравнение (1): $$u'v+uv'+p(x)uv=q(x) \text{ или } u'v+u\big(v'+p(x)v\big)=q(x).$$ Функцию *v* будем подбирать таким образом, чтобы выполнялось условие $v'+p(x)v=0$. Тогда $u'v=q(x)$. Таким образом, для нахождения решения уравнения (1) нужно решить систему дифференциальных уравнений $$\begin{cases} v'+p(x)=0, \\ u'v=q(x). \end{cases}$$ К линейным уравнениям можно свести с помощью замены некоторые другие дифференциальные уравнения, например, **уравнение Бернулли**: $$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n, \quad n\neq 1.$$ Разделив на y^n, получим: $$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x),$$ а замена $$z=y^{-n}, \quad \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$ приводит к линейному уравнению относительно *z*: $$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=f(x).$$
147	Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. Приведем дифференциальное уравнение первого порядка к виду $$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0. \qquad (1)$$ Это делается так же, как и в случае применения метода разделения переменных. Если функции P(x, y) и Q(x, y) дифференцируемы и удовлетворяют условию $$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \qquad (2)$$ то дифференциальное уравнение (1) называют уравнением в полных дифференциалах. В этом случае решение дифференциального уравнения (1) можно записать в виде $$\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=0 \text{ или } \int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=0,$$ где (x_0, y_0) – точка, определяемая начальными условиями.
148	Дифференциальные уравнения второго порядка (определение, задача Коши, общее и частное решения).

	Для дифференциального уравнения второго порядка $F(x,y,y',y'')=0$ можно поставить следующую задачу: найти такое решение данного дифференциального уравнения, которое удовлетворяло двум начальным условиям при $x=x_0$: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$. Здесь оба начальные условия заданы при одном и том же $x=x_0$. Такая задача называется задачей Коши. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2, которые находят из двух начальных условий. Частным решением дифференциального уравнения второго порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ при конкретном значении постоянной $C_1=C_{10}$, $C_2=C_{20}$.
149	Дифференциальные уравнения высших порядков. Рассмотрим дифференциальное уравнение *n*-го порядка: $F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0, \quad (1)$ где *F* предполагается непрерывной функцией всех своих аргументов. Тогда по теореме о существовании неявной функции обычно удается разрешить это уравнение относительно старшей производной: $y^{(n)}=f\left(x,y,y',\ldots y^{(n-1)}\right) \quad (2)$ Условия $y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \quad (3)$ называются начальными условиями. **Общее решения** уравнения (2) содержит *n* произвольных постоянных и имеет вид: $y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n) \quad (4)$ При определенных значениях постоянных получается частное решение.
150	Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Пусть дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $y''=f(x,y') \qquad (1)$ Это дифференциальное уравнение разрешено относительно старшей – второй производной, а правая часть уравнения не зависит от переменной *y* . Тогда надо сделать замену $y' = p(x),\ y'' = (p(x))'=p'(x)$, после чего дифференциальное уравнение (1) упрощается $p' =f(x, p). \qquad (2)$ Если удается решить дифференциальное уравнение (2) и найти p(x), то решение дифференциального уравнения (1) найдем из интеграла $y=\int p(x)\,dx$. Пусть дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $y''=f(y,y'). \qquad (3)$ Теперь правая часть не зависит от переменной *x*. В этом случае следует сделать замену $y'=p(y)$, $y''=(y')'_x=(p(y))'_x=p'_y\cdot y'_x=p'_y\cdot p$. Дифференциальное уравнение (3) упрощается $p\cdot p'_y=f(y,p). \qquad (4)$ Если можно найти решение дифференциального уравнения (4) в виде p = p(y), то решение дифференциального уравнения (3) получим следующим образом $\frac{dy}{dx}=p(y)$, $dx=\frac{dy}{p(y)}$, $x=\int\frac{dy}{p(y)}$.
151	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Линейно зависимые и независимые функции. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$. Если правая часть уравнения равна нулю, то имеем однородное дифференциальное уравнение

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0$$

Решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

где y_1 и y_2 – частные решения однородного уравнения.

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на некотором отрезке $[a,b]$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, хотя бы одно из которых не равно нулю, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \quad (1)$$

на рассматриваемом отрезке. Если же равенство (1) справедливо только при всех $\alpha_i=0$, функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются **линейно независимыми** на отрезке $[a,b]$.

152 Определитель Вронского. Структура общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Определитель вида

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2)$$

называется **определителем Вронского** системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Теорема 1. Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Теорема 2. Если линейно независимые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами, то определитель Вронского для этих функций не может обратиться в нуль ни в одной точке отрезка $[a,b]$.

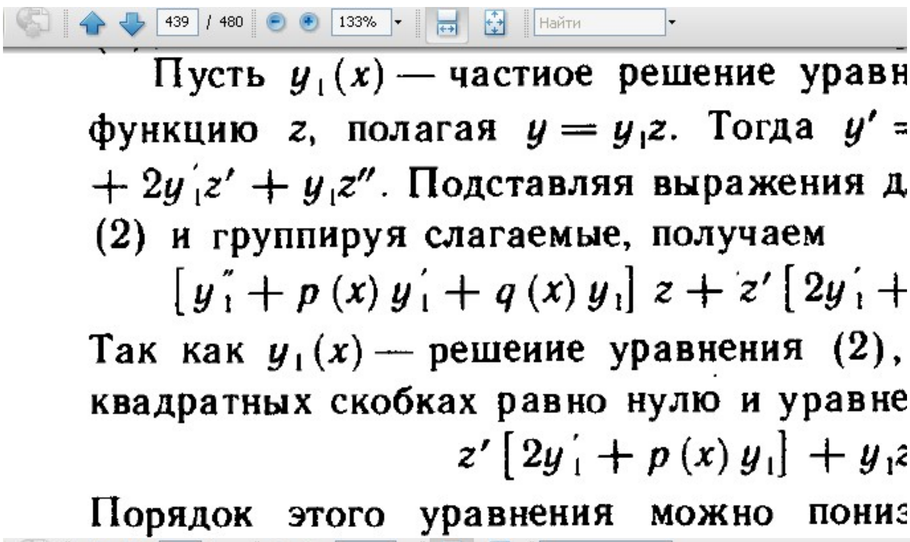
Общее решение однородного уравнения можно записать так

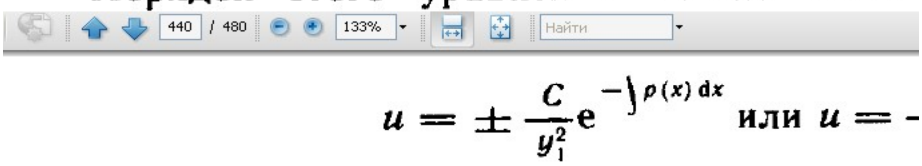
$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

где y_1 и y_2 линейно независимые решения однородного уравнения.

153 Нахождение общего решения по известному одному частному решению.

Рассмотрим уравнение $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ (2)


Пусть $y_1(x)$ — частиое решение уравн
функцию z, полагая $y = y_1 z$. Тогда $y' =$
$+ 2y_1' z' + y_1 z''$. Подставляя выражения д
(2) и группируя слагаемые, получаем
$[y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1] z + z' [2y_1' +$
Так как $y_1(x)$ — решеиие уравнения (2),
квадратных скобках равно нулю и уравне
$z' [2y_1' + p(x) y_1] + y_1$
Порядок этого уравнения можно пони


$u = \pm \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}$ или $u = -$

154	Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{о.о.}$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения $y_{ч.н.}$, $$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.}$$
155	Метод вариации произвольных постоянных. Метод вариации произвольных постоянных заключается в следующем. Пусть линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)\,. \qquad (1)$$ Предположим, что для однородного дифференциального уравнения $$y''+a(x)y'+b(x)y=0 \qquad (2)$$ найдены два линейно независимые решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда надо составить следующую систему $$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x) \end{cases}. \qquad (3)$$ Из системы (3) как из линейной алгебраической следует найти C_1' и C_2', а затем прямым интегрированием определить $C_1(x)$ и $C_2(x)$. После этого решение уравнения (1) можно записать так $$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)\,.$$
156	Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение однородного уравнения $y_{о.о.}$ находится с помощью составления характеристического уравнения $$ak^2+bk+c=0\,, \qquad (1)$$ где a, b, c – коэффициенты уравнения (1). Если корни уравнения (1) k_1 и k_2 действительные и различные, то $y_{о.о.}$ имеет вид $$y_{о.о.}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}\,.$$ Если эти корни совпадают, т.е. $k_1 = k_2 = k$, то $$y_{о.о.}=(C_1x+C_2)e^{kx}\,.$$ Если же корни комплексные $k_{1,2}=\alpha_0\pm i\beta_0$, то $$y_{о.о.}=e^{\alpha_0x}(C_1\cos\beta_0x+C_2\sin\beta_0x)\,.$$
157	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $$ay''+by'+cy=f(x)\,, \qquad (1)$$ где a, b, c - постоянные известные коэффициенты, f(x) – известная функция, которая называется правой частью. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{о.о.}$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения $y_{ч.н.}$, $$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.}\,. \qquad (2)$$ Вид частного решения неоднородного уравнения $y_{ч.н.}$ зависит от вида правой части f(x). Если правая часть дифференциального уравнения (1) имеет вид

	$f(x) = P_n(x)\,e^{\alpha x}$, то частное решение $y_{ч.н.}$ следует искать по формуле $$y_{ч.н.} = Q_n(x)\,e^{\alpha x}\,x^r,$$ где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$ с неопределенными коэффициентами, а r – число корней характеристического уравнения равных α.. Неопределенные коэффициенты находятся не требующим интегрирования методом Неопределенных коэффициентов.

Проверка преподавателем
- оценка «отлично» выставляется студенту, проявившему всесторонние и глубокие знания программного материала и дополнительной литературы, обнаружившему творческие способности в понимании, изложении и практическом использовании материала и справившемуся с кейс-заданием;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, проявившему полное знание программного материала, освоившему основную рекомендованную литературу, обнаружившему стабильный характер знаний и умений и способному к их самостоятельному применению и обновлению в ходе последующего обучения и практической деятельности и частично справившемуся с кейс-заданием;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, проявившему знания основного программного материала в объеме, необходимом для последующего обучения и предстоящей практической деятельности, знакомому с основной рекомендованной литературой, допустившему неточности в ответе на экзамене, но обладающему необходимыми знаниями и умениями для их устранения при корректировке со стороны экзаменатора;
- оценки «неудовлетворительно» ставятся студенту, обнаружившему существенные пробелы в знании основного программного материала, допустившему принципиальные ошибки при применении теоретических знаний, которые не позволяют ему продолжить обучение или приступить к практической деятельности без дополнительной подготовки по данной дисциплине.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедуры оценивания в ходе изучения дисциплины знаний, умений и навыков, характеризующих этапы формирования компетенций, регламентируются положениями:

- П ВГУИТ Положение о курсовых экзаменах и зачетах;
- П ВГУИТ Положение о рейтинговой оценке текущей успеваемости

Для оценки знаний, умений, навыков обучающихся по дисциплине применяется рейтинговая система. Итоговая оценка по дисциплине определяется на основании определения среднеарифметического значения баллов по каждому заданию.

Экзамен по дисциплине выставляется в экзаменационную ведомость по результатам работы в семестре после выполнения всех видов учебной работы, предусмотренных рабочей программой дисциплины (с отметкой «отлично», «хорошо», «удовлетворительно») и получении по результатам тестирования по всем разделам дисциплины не менее 60 %.

5. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания для каждого результата обучения по дисциплине/практике

Результаты обучения по этапам формирования компетенций	Предмет оценки (продукт или процесс)	Показатель оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций	Шкала оценивания	
				Академическая оценка или баллы	Уровень освоения компетенции
***Шифр и наименование компетенции* ОПК-6** способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии					
ЗНАЕТ:	Знание основных концепции и методов, современных направлений математики, основных понятий и методов математического анализа для решения профессиональных задач	Изложение программного материала, стабильный характер знаний и умений и способность к их самостоятельному применению и обновлению в ходе последующего обучения и практической деятельности	При изложении программного материала обучающийся показал всесторонние и глубокие знания, показал творческие способности в понимании, изложении и практическом использовании материала и без ошибок самостоятельно выполнил кейс-задание	Отлично/ 85-100	Освоена (базовый)
			При изложении программного материала обучающийся показал полное знание программного материала, стабильный характер знаний и умений и частично справился с кейс-заданием	Хорошо/ 75-84,99	Освоена (базовый)
			При изложении программного материала обучающийся показал знания программного материала, в объеме, дотасточном для последующего обучения и предстоящей практической справился с кейс-заданием с помощью преподалавтеля.	удовлетворительно/ 60-74,99	Освоена (базовый)
			При изложении программного материала обучающийся показал пробелы в знании основного программного материала, принципиальные ошибки при применении теоретических знаний	неудовлетворительно/ 0-59,99	Не освоена (недостаточный)
УМЕЕТ:	Решение домашних заданий	Умение применять основные концепции и методы, современные направления математики, решать задачи математического анализа для решения профессиональных задач	Обучающийся выбрал верную методику решения задачи, привел верный расчет	Отлично/ 85-100	Освоена (базовый)
			Обучающийся выбрал верную методику решения задачи, представлено решение задач, имеются замечания по тексту и оформлению задания, допущено не более 2 ошибок	Хорошо/ 75-84,99	Освоена (базовый)
			Обучающийся выбрал верную методику решения задачи, привел верный расчет, имеются замечания по тексту и оформлению задания, допущено не более 1 ошибки	удовлетворительно/ 60-74,99	Освоена (базовый)

			Обучающийся выбрал неверную методику решения задачи, провел неправильный расчет, имеются значительные замечания по тексту и оформлению работы, допущено более 2 ошибок.	неудовлетворительно/ 0-59,99	Не освоена (недостаточный)
ВЛАДЕЕТ	Кейс-задания	Владение навыками понимания основных концепций и методов, современных направлений математики, методами математического анализа для решения профессиональных задач	Обучающийся владеет методами математического анализа, выбрал верную методику решения задачи, привел верный расчет	Отлично/ 85-100	Освоена (базовый)
			Обучающийся владеет методами математического анализа, выбрал верную методику решения задачи, представлено решение задач, имеются замечания по тексту и оформлению задания, допущено не более 2 ошибок	Хорошо/ 75-84,99	Освоена (базовый)
			Обучающийся владеет методами математического анализа, выбрал верную методику решения задачи, привел верный расчет, имеются замечания по тексту и оформлению задания, допущено не более 1 ошибки	удовлетворительно/ 60-74,99	Освоена (базовый) Освоена (базовый)
			Обучающийся не владеет методами математического анализа, выбрал неверную методику решения задачи, провел неправильный расчет, имеются значительные замечания по тексту и оформлению работы, допущено более 2 ошибок.	неудовлетворительно/ 0-59,99	Не освоена (недостаточный)